

# I. Analiza niepewności pomiarowych

## I.1. Układ SI

W 1960 r. na XI Generalnej Konferencji Miar i Wag w Paryżu wprowadzono tzw. międzynarodowy układ jednostek oznaczany w skrócie SI od nazwy francuskiej Le Systeme International d'Unites. Układ ten oparty jest na siedmiu niezależnych **jednostkach podstawowych** odpowiadających siedmiu wielkościom fizycznym przyjętym za podstawowe (tabela 1). Wszystkie inne jednostki, nazwane **pochodnymi** definiuje się za pomocą jednostek podstawowych. Jednostki pochodne tworzy się z jednostek podstawowych na podstawie praw fizycznych wiążących rozpatrywane wielkości. Przykładowo, jednostka siły niuton jako jednostka pochodna wyrażona jest poprzez jednostki podstawowe w postaci  $N=kg \cdot m/s^2$  dlatego, że istnieje prawo fizyczne (II zasada dynamiki Newtona) wiążące rozpatrywane wielkości.

Tabela 1. Podstawowe jednostki miar układu SI

Wielkość fizyczna	Oznaczenie wielkości	Nazwa jednostki	Skrót jednostki
Długość	L	metr	m
Masa	M	kilogram	kg
Czas	T	sekunda	s
Natężenie prądu elektrycznego	I	amper	A
Temperatura termodynamiczna	$\Theta$	kelwin	K
Światłość (natężenie światła)	J	kandela	cd
Ilość (liczność) materii	N	mol	mol

Celem uniknięcia stosowania bardzo dużych lub bardzo małych liczb można używać odpowiednich przedrostków, które zwiększają lub zmniejszają dołączoną do niej jednostkę miary. Najważniejsze przedrostki przedstawione są w tabeli 2.

## I.2. Pomiar wielkości fizycznych

**Pomiar** wielkości fizycznej polega na porównaniu jej z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę. Zatem liczba otrzymana jako wynik pomiaru zależy od wyboru jednostki (np. długość pręta możemy wyrazić w cm, m, stopa, cal, itd za każdym razem otrzymując inną wartość liczbową). Wynik pomiaru musi więc zawsze składać się z dwóch części: **wartości liczbowej oraz jednostki**.

Pomiary wielkości fizycznych dzielimy na bezpośrednie i pośrednie. **Pomiary bezpośrednie** polegają na porównaniu danej wielkości z odpowiednią miarą wzorcową, np. pomiar wymiarów ciała za pomocą linijki, suwmiarki czy śruby mikrometrycznej, pomiar czasu trwania jakiegoś procesu przy użyciu stopera, pomiar natężenia prądu amperomierzem. W przypadku **pomiarów pośrednich** wartość badanej wielkości wyznaczana jest na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości fizycznych, które są z nią związane znanym nam prawem fizycznym. Na przykład, chcemy wyznaczyć wartość przyspieszenia

ziemskiego na podstawie okresu drgań wahadła matematycznego. Jak wiadomo okres drgań wahadła opisuje wzór:  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , stąd  $g = 4\pi^2 l T^{-2}$ . W celu wyznaczenia wartości  $g$  musimy zatem dokonać pomiarów (bezpośrednich) okresu drgań wahadła ( $T$ ) oraz długości nici ( $l$ ). Innym przykładem jest wyznaczanie natężenia prądu elektrycznego na podstawie pomiarów spadku napięcia na oporniku wzorcowym oraz prawa Ohma  $I = U/R$ . Widzimy, że w zależności od wyboru metody pomiarowej, wartości niektórych wielkości fizycznych mogą być wyznaczane zarówno drogą pomiarów bezpośrednich, jak i pośrednich.

**Tabela 2.** Przedrostki jednostek metrycznych

Mnożnik	Przedrostek	Skrót	Mnożnik	Przedrostek	Skrót
$(10^3)^8 = 10^{24}$	Jotta	Y	$10^{-1}$	decy	d
$(10^3)^7 = 10^{21}$	Zetta	Z	$10^{-2}$	centy	c
$(10^3)^6 = 10^{18}$	Eksa	E	$10^{-3}$	mili	m
$(10^3)^5 = 10^{15}$	Peta	P	$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$	mikro	$\mu$
$(10^3)^4 = 10^{12}$	Tera	T	$(10^{-3})^3 = 10^{-9}$	nano	n
$(10^3)^3 = 10^9$	Giga	G	$(10^{-3})^4 = 10^{-12}$	piko	p
$(10^3)^2 = 10^6$	Mega	M	$(10^{-3})^5 = 10^{-15}$	femto	f
$10^3$	Kilo	k	$(10^{-3})^6 = 10^{-18}$	atto	a
$10^2$	Hekto	h	$(10^{-3})^7 = 10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	Deka	da	$(10^{-3})^8 = 10^{-24}$	jokto	y

### I.3. Błędy i niepewności pomiarowe

Niezależnie od metody pomiarów nie możemy nigdy bezwzględnie dokładnie wyznaczyć rzeczywistej wartości wielkości fizycznej. Różnicę pomiędzy wynikiem pomiaru a rzeczywistą wartością mierzonej wielkości nazywamy **błędem pomiaru**. Zatem

$$\text{błąd pomiaru} = \text{wartość zmierzona} - \text{wartość rzeczywista}$$

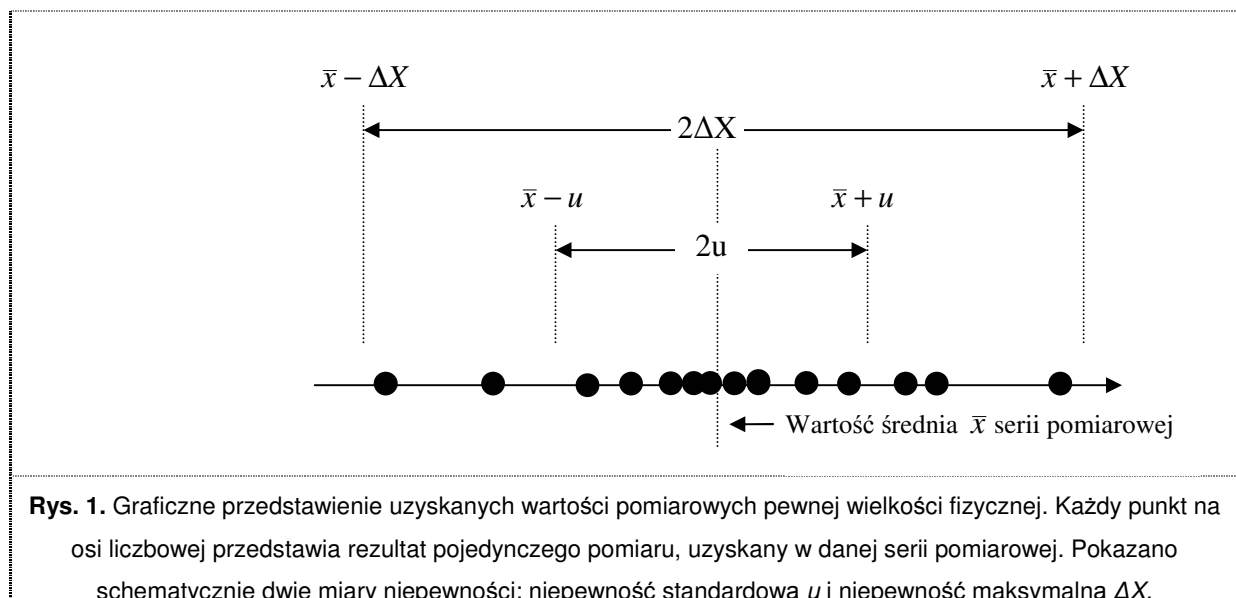
Błędy pomiarów tradycyjnie dzielimy na grube (omyłki), przypadkowe oraz systematyczne.

**Błędy grube** powstają zwykle na skutek nieuwagi lub niestaranności obserwatora przy odczytywaniu lub zapisywaniu wyników lub w wyniku nagłej zmiany warunków pomiaru (np. wstrząsy). Jeśli mamy serię pomiarów wyniki obciążone błędem grubym są łatwe do wykrycia i usunięcia. **Błędy systematyczne** wynikają z niedoskonałości przyrządów i metod pomiarowych. Można je redukować, stosując bardziej doskonałe i precyzyjne metody i przyrządy, jednak całkowite wyeliminowanie błędów systematycznych jest niemożliwe. Rozpoznane błędy systematyczne należy uwzględnić poprzez wprowadzenie odpowiednich poprawek do wyniku, np. kiedy ważymy na wadze, której wskazanie bez obciążenia wynosi  $m_0$  zamiast zero to  $m_0$  jest błędem systematycznym, który należy odjąć od wyniku ważenia. Innym typowym przykładem jest poprawka na opór wewnętrzny woltomierza przy pomiarze napięcia. Z **błędami przypadkowymi** mamy do czynienia zawsze. Wynikają one z różnych przypadkowych i niedających się uwzględnić czynników, (np. wahań temperatury, lub ruchu powietrza w pobliżu przyrządu pomiarowego). Inną przyczyną może być niezgodność

przyjętego modelu z obiektem mierzonym, np. gdy mamy zmierzyć średnicę pręta, zakładamy, że jest on idealnym walcem, co nie jest prawdą. O istnieniu błędów przypadkowych świadczy niepowtarzalność wyników pomiaru jednej i tej samej wielkości. Błędy przypadkowe redukuje się poprzez wielokrotne powtarzanie pomiaru – zachodzi wówczas częściowa kompensacja przypadkowych odchyłek zawyżających i zaniżających wynik pomiaru.

Ponieważ zwykle nie znamy rzeczywistej wartości wielkości mierzonej, więc posługiwanie się w praktyce pojęciem błędu pomiaru nie jest wygodne. Obecnie przy opracowywaniu wyników pomiarów należy stosować się do zaleceń Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru. Norma ta, uzgodniona w 1995 r. i przyjęta ustawowo w Polsce w 1999 r. znajduje zastosowanie w różnych dziedzinach nauki i techniki.

Wspomniana Norma Międzynarodowa zaleca posługiwanie się terminem **niepewność pomiarowa**, zdefiniowanym jako parametr charakteryzujący wątpliwości dotyczące wartości wyniku pomiarowego. Nie należy mylić błędu i niepewności pomiaru. Może być tak, że błąd pomiaru jest niewielki (przypadkowo otrzymaliśmy w rezultacie pomiarów wartość bliską wartości prawdziwej), a mimo to niepewność tych samych pomiarów jest duża (bo np. używamy mało dokładnych przyrządów). Formalnie niepewność pomiarowa jest określona jako parametr charakteryzujący rozrzut wyników uzyskanych w czasie pomiaru danej wielkości. Im pomiar jest bardziej dokładny, tym niepewność pomiarowa jest mniejsza. Mogą być różne miary niepewności pomiaru. Dwie najczęściej stosowane to niepewność standardowa i niepewność maksymalna. **Niepewność standardowa** (ang. standard uncertainty) jest nowym terminem wprowadzonym przez Normę Międzynarodową i jest *odchyleniem standardowym średniej arytmetycznej*. Jest to miara niepewności najczęściej stosowana i uznana za podstawową.



**Rys. 1.** Graficzne przedstawienie uzyskanych wartości pomiarowych pewnej wielkości fizycznej. Każdy punkt na osi liczbowej przedstawia rezultat pojedynczego pomiaru, uzyskany w danej serii pomiarowej. Pokazano schematycznie dwie miary niepewności: niepewność standardową  $u$  i niepewność maksymalną  $\Delta X$ .

Główną zaletą odchylenia standardowego są wygodne właściwości matematyczne tego parametru statystycznego: szacowanie za pomocą zamkniętych wzorów bez współczynników numerycznych i podleganie prawu przenoszenia niepewności. Symbolem niepewności

standardowej jest  $u$  (od ang. uncertainty), który można zapisywać na trzy różne sposoby, np.  $u$ ,  $u(x)$  lub  $u(\text{stężenie NaCl})$ . Zaletą tego zapisu jest to, że informacja o wielkości mierzonej może być wyrażona słownie, co ułatwia tworzenie dokumentacji pomiaru. Należy jednak pamiętać, że  $u$  nie jest funkcją tylko jest liczbą.

Inną często stosowaną miarą niepewności jest niepewność maksymalna (rys.1.). **Niepewność maksymalną**  $\Delta X$  szacujemy w ten sposób, że staramy się określić przedział o szerokości  $2\Delta X$ , w którym będą się mieściły wszystkie możliwe wyniki pomiarów. Będziemy twierdzili, że nieznaną wartość prawdziwą zawarta jest na pewno w tym przedziale. Niepewność maksymalna jest stosowana w wielu sytuacjach, np. jako miara dokładności elektrycznych przyrządów pomiarowych lub prostych przyrządów mechanicznych.

#### **I.4. Dwa sposoby szacowania niepewności pomiarowych: metoda typu A i metoda typu B**

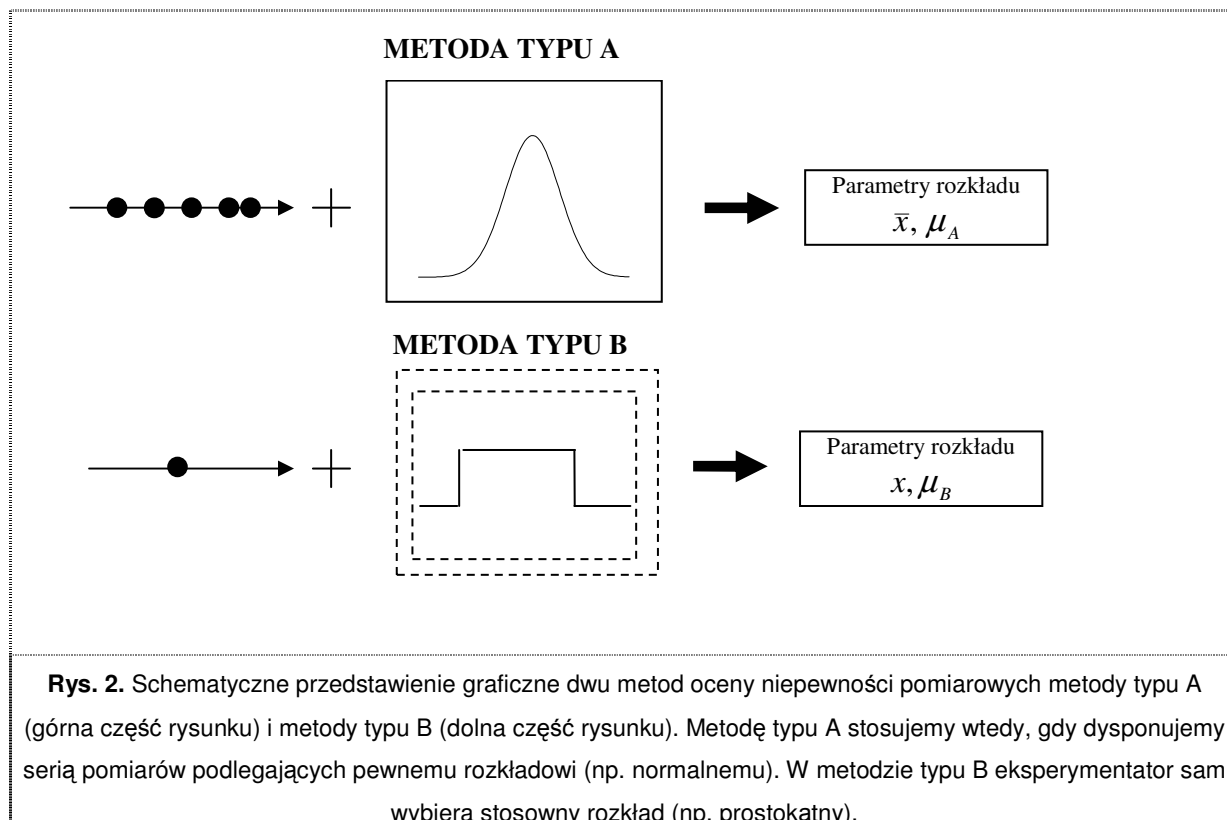
Niepewność standardowa może być szacowana na dwa sposoby: sposób **typu A** (ang. type A evaluation of uncertainty), wykorzystujący analizę statystyczną serii pomiarów oraz sposób **typu B** (ang. type B evaluation of uncertainty), oparty na każdym innym sposobie niż w przypadku A, np. na naukowym osądzie obserwatora. Związany z tym jest podział niepewności na dwa rodzaje – typu A i typu B. Wynika on z dwu różnych dróg oceny składników niepewności. Podział ten nie ma na celu zróżnicowania niepewności ze względu na ich naturę, lecz jedynie na sposób ich szacowania. Obydwa sposoby oceny oparte są na rozkładach prawdopodobieństwa, a ich miarą jest zawsze odchylenie standardowe. Niepewność standardowa typu A jest obliczana na podstawie rozkładu częstości otrzymanych rezultatów wielokrotnych pomiarów, natomiast niepewność standardową typu B oblicza się (szacuje) na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego subiektywnie przez obserwatora (rys.2).

Metodę typu A można np. wykorzystać podczas

- obliczania odchylenia standardowego średniej arytmetycznej dla serii niezależnych pomiarów,
- stosowania metody najmniejszych kwadratów w celu dopasowania krzywej do punktów pomiarowych i obliczania parametrów tej krzywej i ich odchyleń standardowych.

Metoda typu B może być zastosowana do dostępnej informacji, która może pochodzić z następujących źródeł:

- poprzednio wykonanych pomiarów,
- specyfikacji producenta urządzenia pomiarowego,
- danych o kalibracji przyrządu,
- tablicowych danych referencyjnych.



## I.5. Obliczanie niepewności pomiarowych

### I.5.1. Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

Przypuśćmy, że wykonaliśmy serię  $n$  jednakowo dokładnych pomiarów bezpośrednich wielkości fizycznej  $X$ , otrzymując wyniki  $X_1, X_2 \dots X_n$ . Jeśli wyniki pomiarów nie są takie same, wówczas za najbardziej zbliżoną do wartości prawdziwej przyjmujemy średnią arytmetyczną ze wszystkich wyników pomiarów:

$$X \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

Stwierdzenie to jest tym bardziej słuszne im większa jest liczba przeprowadzonych pomiarów (dla  $n \rightarrow \infty$ ,  $\bar{X} \rightarrow X$ ). Zakładamy, że nasze rezultaty pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu (rozkładowi Gaussa). W celu określenia **niepewności standardowej** posługujemy się w tym wypadku sposobem typu A, czyli korzystamy ze wzoru na odchylenie standardowe średniej

$$u_A(X) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}} \quad (2)$$

Często używamy pojęcia niepewności względnej. **Niepewność względną**  $u_r$  obliczamy jako iloraz niepewności standardowej  $u(x)$  i średniej arytmetycznej  $\bar{x}$ ; zwykle wyrażamy ją w procentach:

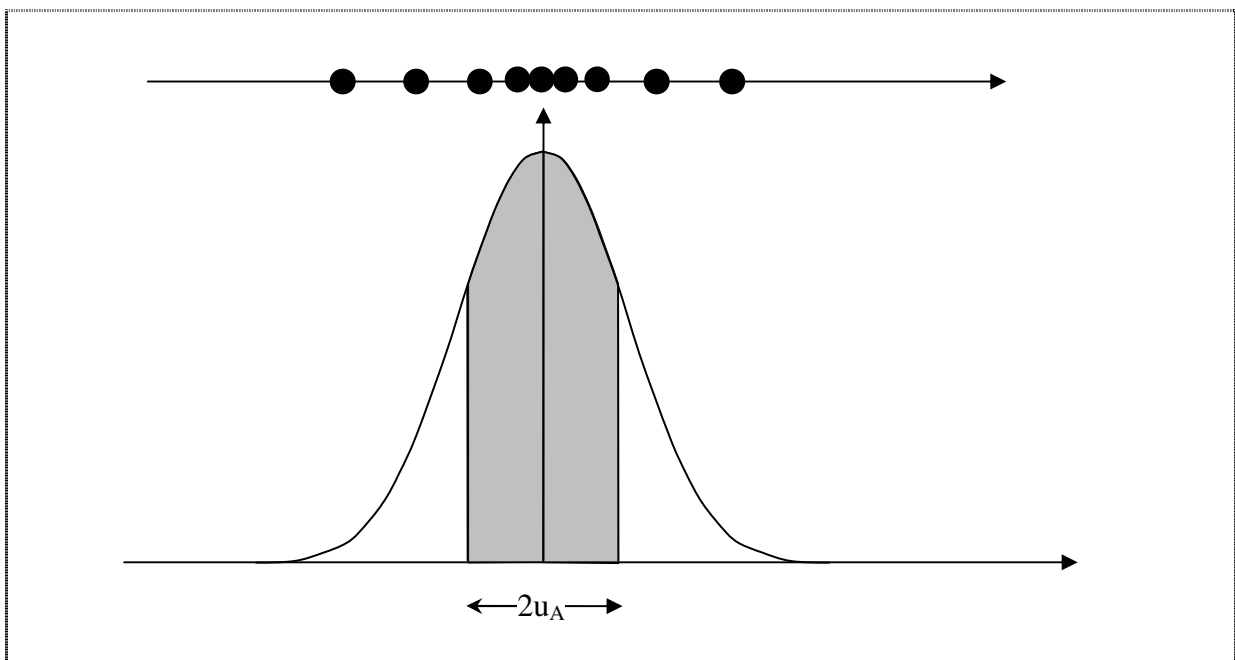
$$u_r = \frac{u(x)}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (3)$$

Gdy kilkakrotne pomiary pewnej wielkości  $X$  nie są jednakowo dokładne, np. rezultat pomiarowy  $X_1$  obarczony jest niepewnością  $u_1(X_1)$ , rezultat  $X_2$  niepewnością  $u_2(X_2)$  itd., to za najbardziej zbliżoną do wartości prawdziwej przyjmujemy **średnią arytmetyczną ważoną**  $\bar{X}_w$

$$\bar{X}_w = \frac{\sum_i w_i \cdot X_i}{\sum_i w_i} \quad (4)$$

gdzie  $w_i$  jest tzw. *wagą danego pomiaru* i jest tym większe, im mniejsza jest jego niepewność. W ten sposób dane, które mają większą wagę mają większy udział w określaniu średniej. Możemy wagę zdefiniować jako odwrotność kwadratu niepewności standardowej, tzn.

$$w_i(X_i) = \frac{1}{u_i^2(X_i)} \quad (5)$$



**Rys. 3.** Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego (rozkład Gaussa). Wartości średnich arytmetycznych otrzymane w różnych seriach pomiarowych (punkty na górnej osi liczbowej) gromadzą się wokół wartości prawdziwej, a miarą ich rozrzutu jest niepewność standardowa  $u_A$ . W obszarze o szerokości  $2u_A$  wokół wartości prawdziwej znajduje się około 68 % pola powierzchni pod krzywą Gaussa. Oznacza to także, że 68 % wszystkich pomiarów znajduje się w tym przedziale.

Na niepewność standardową średniej arytmetycznej ważonej obowiązywać będzie równanie

$$u_{Aw}(\bar{X}_w) = \frac{1}{\sqrt{\sum_i \frac{1}{u_i^2}}} \quad (6)$$

Przykładowo, gdyby wykonane zostały trzy pomiary i otrzymano następujące wartości i ich niepewności standardowe (wszystkie w tych samych jednostkach):  $X_1=35$ ,  $u(X_1)=2$ ,  $X_2=47$ ,  $u(X_2)=10$ ,  $X_3=38$ ,  $u(X_3)=4$ , to zgodnie z równaniem (5) wagi tych pomiarów byłyby następujące:  $w_1=1/4$ ,  $w_2=1/100$ ,  $w_3=1/16$ . Z równania (4) otrzymamy  $\bar{X}_w=37,0$ , zaś z

równania (6)  $u_{Aw}(X_w) = 1.8$ . Średnią ważoną używamy także w takich sytuacjach, gdy pojedyncze pomiary są jednakowo dokładne, ale wykonujemy pomiary seriami, a liczebności serii (ilość pomiarów w serii) są różne. W takiej sytuacji waga przypisana każdej serii może być równa liczebności serii.

Gdy wyniki wielokrotnie powtarzanych pomiarów nie wykazują rozrzutu, czyli  $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ , lub gdy pomiar wielkości  $X$  wykonujemy tylko raz, wówczas niepewność standardową szacujemy sposobem typu B. Wtedy niepewności standardowe ocenia się na podstawie wiedzy o danej wielkości lub o przedziale, w którym wartość rzeczywista powinna się mieścić. Można np. wykorzystać informację o niepewności maksymalnej określonej przez producenta przyrządu pomiarowego lub o wartości działki elementarnej  $\Delta X$  przyrządu. Przyjmując, że  $\Delta X$  jest równe połowie szerokości **rozkładu prostokątnego (jednostajnego)**, to niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u_B^{jedn.}(X) = \frac{\Delta X}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

W niektórych sytuacjach wybór rozkładu jednostajnego nie jest właściwy – zakłada on przecież takie samo prawdopodobieństwo, że wartość prawdziwa leży w środku rozkładu jak i w pobliżu jego brzegów (rys. 4). Gdy przypuszczamy, że większe jest prawdopodobieństwo występowania wartości prawdziwej w środku rozkładu i maleje ono do zera gdy zbliżamy się do jego brzegu, to bardziej odpowiednim rozkładem będzie **symetryczny rozkład trójkątny**. Dla tego rozkładu niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u_B^{trj.}(X) = \frac{\Delta X}{\sqrt{6}} \quad (8)$$

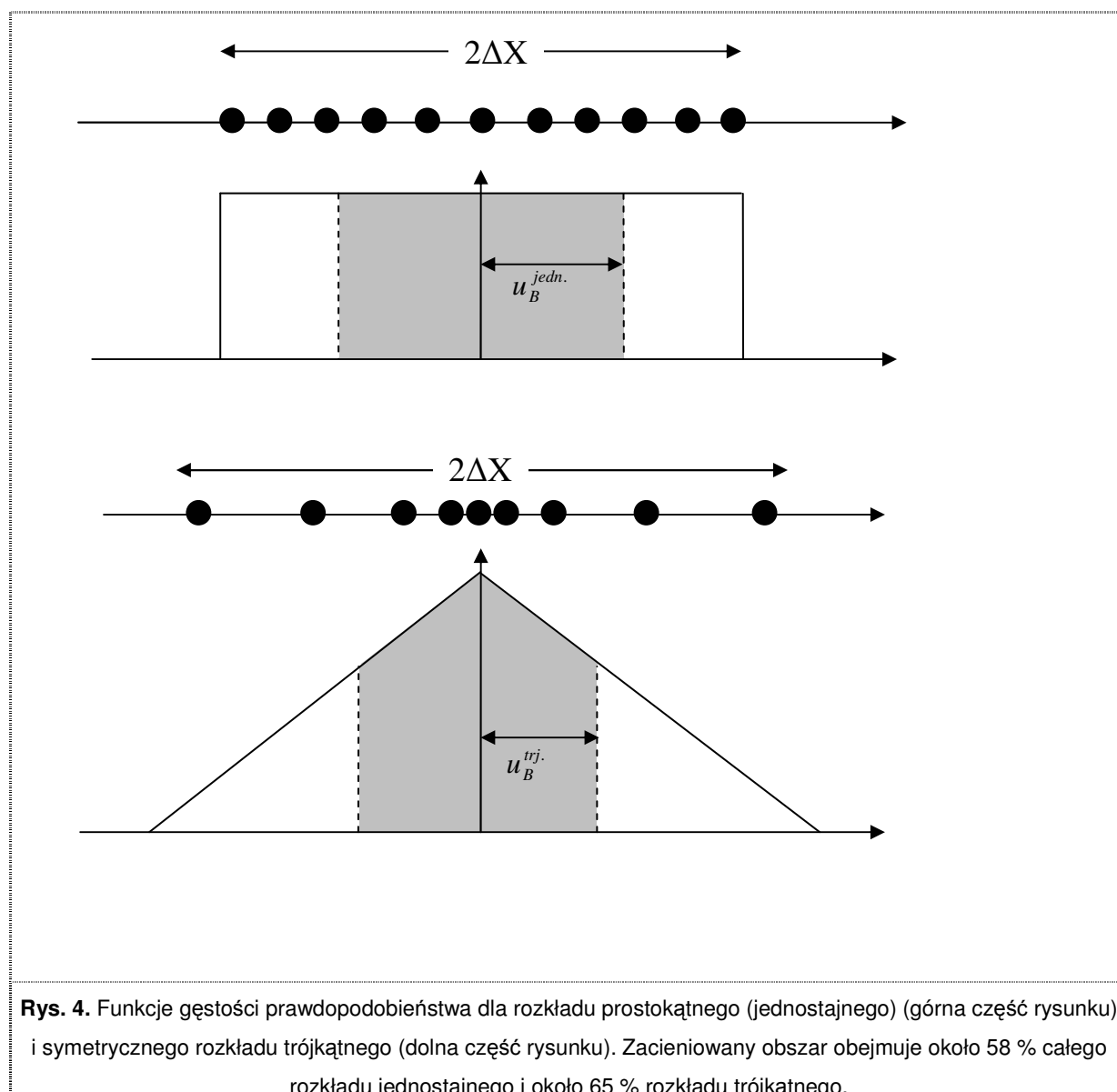
W przypadku oceny niepewności typu B mamy zwykle do czynienia z kilkoma przyczynkami, które wpływają na całkowitą wartość niepewności tego typu. Całkowitą niepewność typu B obliczymy sumując kwadraty niepewności od różnych przyczynków i pierwiastkując otrzymaną sumę

$$u_{B\text{ calk}}(X) = \sqrt{u_{B1}^2(X) + u_{B2}^2(X) + u_{B3}^2(X) + \dots} \quad (9)$$

Dla prostych *przyrządów mechanicznych* (tj. linijka, śruba mikrometryczna, stoper czy termometr) najczęściej jako niepewność maksymalną  $\Delta X$  można przyjąć działkę elementarną przyrządu, np.  $\Delta X = 1$  mm dla linijki. W *przyrządach z odczytem cyfrowym* najmniejsza wartość odpowiadająca ostatniej wyświetlanej cyfrze określa rozdzielczość przyrządu – oznaczymy ją symbolem *dgt* (od ang. digit - cyfra). Niepewność pomiaru podawana w instrukcji obsługi przyrządu może być traktowana jako niepewność maksymalna i zwykle definiowana jest jako określony ułamek wielkości mierzonej plus wielokrotność rozdzielczości

$$\Delta X = C_1 \cdot X + C_2 \cdot dgt \quad (10)$$

Na przykład, gdy dla konkretnego multimetru cyfrowego mamy  $C_1 = 0,8\%$ ,  $C_2 = 40$  dla zakresu 500,00 mV, a mierzona wartość jest równa 337,38 mV, to  $\Delta X = 0,008 \cdot 337,38 + 40 \cdot 0,01 = 3,10$  mV. Uzyskaną ze specyfikacji producenta niepewność maksymalną zaleca się wówczas zamienić na niepewność standardową za pomocą równania (7).



**Rys. 4.** Funkcje gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu prostokątnego (jednostajnego) (górna część rysunku) i symetrycznego rozkładu trójkątnego (dolna część rysunku). Zaciemniony obszar obejmuje około 58 % całego rozkładu jednostajnego i około 65 % rozkładu trójkątnego.

Niepewność wnoszona przez przyrząd pomiarowy to często nie jedyny i najważniejszy powód wpływający na niepewność pomiarową. Sam eksperymentator może wносить znacznie większy udział do końcowej niepewności, który nie powinien zostać przeoczony. Np. przy pomiarze czasu za pomocą stopera powszechnie przyjmuje się taki udział jako  $\Delta X_2 = 0,2$  s, co jest związane z szybkością reakcji osoby obsługującej stoper. Jest to znacznie więcej niż  $\Delta X_1 = 0,01$  s, wynikające z działki elementarnej stopera. Także w sytuacji, gdy pomiar lub odczyt jest utrudniony, np. gdy mierzony obiekt lub wskazówka przyrządu nieustannie się porusza, rozsądne jest zwiększenie wartości niepewności maksymalnej. Tak więc, szacując wielkość niepewności maksymalnej kierujemy się przede wszystkim własnym osądem, znajomością techniki pomiaru i zdrowym rozsądkiem.

Gdy występuje równocześnie kilka niepewności i są one tego samego rzędu, to żadnej z nich nie można zaniedbać. Wprowadzamy wówczas pojęcie **niepewności standardowej całkowitej**, którą obliczamy ze wzoru wynikającego z *prawa przenoszenia odchyłeń standardowych*



$$u_{\text{calc}}(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_{B1}^2(X) + u_{B2}^2(X) + u_{B3}^2(X) + \dots} \quad (11)$$

gdzie ilość członów z niepewnością standardową typu B zależy od ilości wkładów do tej niepewności zidentyfikowanej przez obserwatora.

### I.5.2. Niepewność standardowa pomiarów pośrednich – niepewność złożona

W przypadku pomiarów pośrednich wielkość mierzona  $Y$  obliczamy korzystając ze związku funkcyjnego, który można zapisać w ogólnej postaci:  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , gdzie symbolami  $X_1, X_2, \dots, X_k$  oznaczamy  $k$  wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio. Zakładamy, że znane są średnie arytmetyczne serii pomiarów tych wielkości  $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$  oraz ich niepewności standardowe  $u(X_1), u(X_2), \dots, u(X_k)$ . Wynik (końcowy) pomiaru oblicza się wówczas ze wzoru:

$$Y \approx \bar{Y} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \quad (12)$$

W przypadku pomiarów pośrednich nieskorelowanych (tzn., gdy każdą z wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_k$  mierzy się niezależnie) **niepewność standardową złożoną** (ang. combined standard uncertainty) wielkości  $Y$  szacujemy przy pomocy przybliżonego wzoru:

$$u_c(Y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left[ \frac{\partial f}{\partial X_j}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \right]^2 u^2(X_j)} \quad (13)$$

W tabeli 3 przedstawiono wzory określające niepewności standardowe złożone  $u_c$  i niepewności standardowe złożone względne  $u_{c,r}$  dla kilku typowych zależności funkcyjnych. Zostały one obliczone ze wzoru (13).

### I.5.3. Niepewność rozszerzona

Niepewność standardowa całkowicie i jednoznacznie określa wartość wyniku, jednak do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z innymi rezultatami (np. z wartością tabelaryczną) oraz dla celów komercyjnych i do ustalania norm przemysłowych, zdrowia, bezpieczeństwa itp., Międzynarodowa Norma wprowadza pojęcie **niepewności rozszerzonej** (ang. expanded uncertainty) oznaczanej symbolem  $U$  (dla pomiarów bezpośrednich), lub  $U_c$  (dla pomiarów pośrednich). Wartość niepewności rozszerzonej oblicza się ze wzoru

$$U(X) = ku(X) \text{ lub } U_c(X) = ku_c(X) \quad (14)$$

Liczba  $k$ , zwana **współczynnikiem rozszerzenia** (ang. coverage factor), jest umownie przyjętą liczbą wybraną tak, aby w przedziale  $X \pm U(X)$  znalazła się **większość** wyników pomiaru potrzebna dla danych zastosowań. Wartość współczynnika rozszerzenia mieści się najczęściej w przedziale  $2 \div 3$ . W większości zastosowań zaleca się przyjmowanie umownej wartości  $k = 2$ .

W sytuacji, gdy wyniki wielokrotnych pomiarów (liczba pomiarów jest rzędu kilkudziesięciu) podlegają rozkładowi normalnemu, to dla  $k=1$  w przedziale o niepewności rozszerzonej  $2U$  wokół wartości średniej  $\bar{x}$  znajdzie się 68 % wyników pomiarowych, dla  $k=2$  w dwukrotnie większym przedziale znajdzie się 95 % wyników pomiarów, zaś dla  $k=3$  więcej

niż 99 % pomiarów (rys. 5). Równoważne jest to stwierdzeniu, że wartość prawdziwa znajduje się z 95 % prawdopodobieństwem w przedziale o szerokości  $2U$  ( $k=2$ ) wokół wartości średniej i z 99 % prawdopodobieństwem w szerszym przedziale  $2U$  ( $k=3$ ). Te prawdopodobieństwa (wyrażone w skali 0÷1, a nie w %) noszą nazwę **poziomu ufności**.

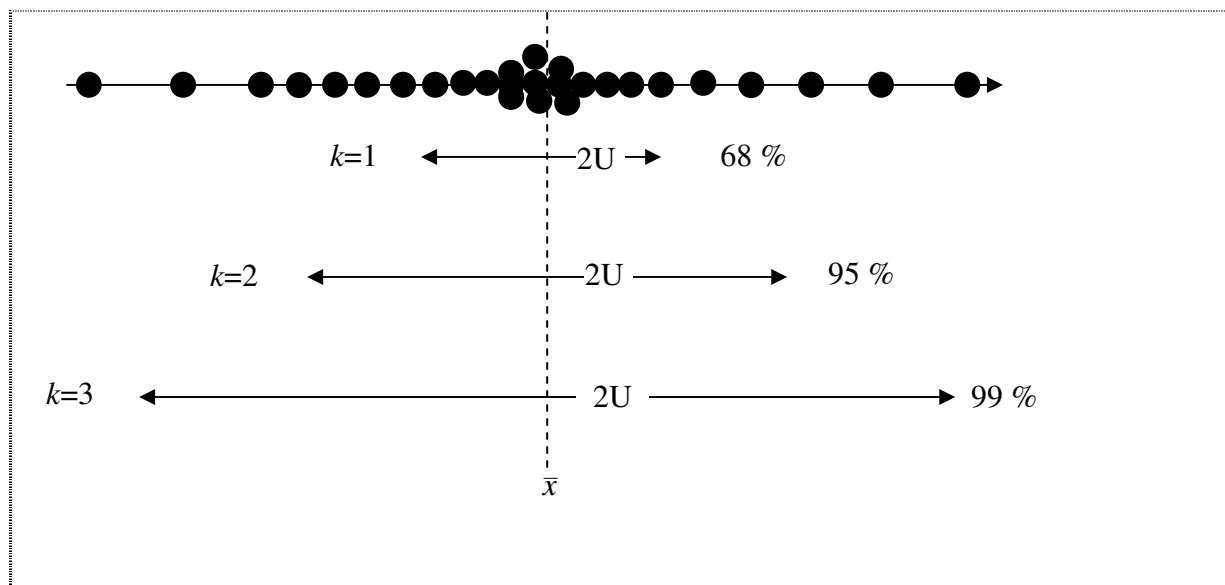
**Tabela 3.** Niepewności standardowe złożone bezwzględne i względne (z pominięciem %) pomiarów pośrednich dla typowych zależności funkcyjnych

Funkcja	Niepewność standardowa złożona	Niepewność standardowa złożona względna
$z = f(x, y) = x + y$	$u_c(z) = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = \frac{\sqrt{u^2(x) + u^2(y)}}{x + y}$
$z = f(x, y) = x \cdot y$	$u_c(z) = x \cdot y \cdot \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$
$z = f(x, y) = \frac{x}{y}$	$u_c(z) = \frac{x}{y} \cdot \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$
$z = f(x) = \frac{1}{x}$	$u_c(z) = \left \frac{1}{x^2}\right  \cdot u(x)$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = \left \frac{1}{x}\right  \cdot u_x$
$z = f(x) = x^n$	$u_c(z) = n \cdot x^{n-1} \cdot u(x)$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = n \cdot u(x)$
$z = f(x, y) = ax^n y^m$	$u_c(z) = z \cdot \sqrt{\left(\frac{nu(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{mu(y)}{y}\right)^2}$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{nu(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{mu(y)}{y}\right)^2}$
$z = f(x) = a \cdot e^{bx}$	$u_c(z) = a \cdot b \cdot e^{bx} \cdot u(x)$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} =  b  \cdot u(x)$
$z = f(x) = a \cdot \ln(x)$	$u_c(z) = a \cdot u(x)$	$u_{c,r} = \frac{u_c(z)}{z} = \frac{u(x)}{ \ln(x) }$

W przypadku, gdy seria pomiarowa jest mniej liczna (kilka, kilkanaście pomiarów) wartości współczynnika rozszerzenia  $k$ , odpowiadającego różnym poziomom ufności, zależą od ilości pomiarów. Wartości te umieszczone są w tabeli 4.

**Tabela 4.** Wartości współczynników rozszerzenia  $k$  dla dwu różnych poziomów ufności i różnej ilości pomiarów  $n$

Ilość pomiarów	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poziom ufności 0,95	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262
Poziom ufności 0,99	63,657	9,925	5,841	4,604	4,032	3,707	3,499	3,355	3,250



**Rys. 5.** Graficzne przedstawienie celowości stosowania niepewności rozszerzonej  $U$  i współczynnika rozszerzenia  $k$  dla licznej serii pomiarowej (punkty). Wyniki pomiarów podlegają rozkładowi normalnemu. Liczby po prawej stronie (w %) informują o części wszystkich rezultatów znajdujących się w danym przedziale.

## I.6. Przedstawianie i zapis wyników pomiaru

Przedstawiając wyniki pomiarów stosujemy zasadę podawania raczej większej liczby informacji niż jest to konieczne. W szczególności należy:

- jednoznacznie opisać metodę obliczeń wyniku i niepewności,
- podać składniki niepewności i sposób ich obliczania,
- prezentować wyniki w taki sposób, aby czytelnik miał możliwość powtórzenia obliczeń a nawet pomiarów podać wszystkie wniesione poprawki, stałe, stałe fizyczne i źródła, z których je zaczerpnięto.

Wyniki pomiaru zapisujemy zawsze łącznie z niepewnością i jednostką. Niepewność podajemy zawsze z dokładnością do **dwu cyfr**, zaś liczbę cyfr znaczących wyniku dobieramy tak, aby **ostatnia cyfra rezultatu i niepewności należały do tego samego rzędu**. Dla niepewności standardowych zalecany jest **zapis z użyciem nawiasów**, zaś dla niepewności rozszerzonej stosowany jest **zapis z użyciem symbolu  $\pm$** .

Przykłady poprawnych i niepoprawnych zapisów:

Poprawnie:

Niepewność standardowa:

$$m = 100,0214 \text{ g}, u(m) = 3,5 \text{ mg}, m = 100,0214(35) \text{ g}, m = 100,0214(0,0035) \text{ g}$$

Niepewność rozszerzona:

$$m = 100,0214 \text{ g}, U(m) = 0,0070 \text{ g}, k=2, m = (100,0214 \pm 0,0070) \text{ g}, k=2$$

Niepoprawnie:

$m = 100,0214 \text{ g}$  – nie podano niepewności,

$m = 100,021(0,0035) \text{ g}$  – ostatnie cyfry rezultatu i niepewności nie są tego samego rzędu,

$m = 100,021 \text{ g}, u(m) = 3 \text{ mg}$  – przy zapisie niepewności podano zbyt mało cyfr,

$m = 100,02147(0,00352) \text{ g}$  – przy zapisie niepewności podano zbyt dużo cyfr.

## I.7. Przykład opracowania wyników doświadczenia

Celem wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego przeprowadzono pomiary czasu spadku ciała z pewnej wysokości. Wysokość spadku  $h$  zmierzono 3-krotnie taśmą mierniczą z podziałką milimetrową, uzyskując za każdym razem wynik 1270 mm. Czas spadku  $t$  zmierzono 5 razy, otrzymując następujące wyniki (wszystkie wyrażone w sekundach)  $t_1=0,48$ ,  $t_2=0,52$ ,  $t_3=0,48$ ,  $t_4=0,54$ ,  $t_5=0,52$ . Dokładność czasomierza wynosiła 0,02 s, zaś niepewność systematyczną związaną z wyborem chwili włączenia i wyłączenia oszacowano na 0,04 s. Obliczyć na podstawie tych danych przyspieszenie ziemskie i jego niepewność.

**Rozwiązanie:** Przyspieszenie ziemskie będziemy obliczać ze wzoru  $g = 2ht^{-2}$ . Wartość  $\bar{g}$  otrzymamy wstawiając do tego równania średnie arytmetyczne wysokości spadku ( $\bar{h}$ ) oraz czasu spadku ( $\bar{t}$ ) (wzór (1)). Dla danych z tego przykładu mamy:

$$\bar{h} = 1270 \text{ mm} = 1,27 \text{ m}, \quad \bar{t} = \frac{1}{5}(0,48 + 0,52 + 0,48 + 0,54 + 0,52) \text{ s} = 0,508 \text{ s}$$

$$\text{Stąd} \quad \bar{g} = \frac{2 \cdot 1,27 \text{ m}}{(0,508 \text{ s})^2} \approx 9,842 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Aby obliczyć niepewność złożoną pomiaru pośredniego  $g$  musimy najpierw określić niepewności standardowe pomiaru czasu i wysokości.

### Oszacowanie niepewności standardowej (bezpośredniego) pomiaru czasu $u(t)$ :

**Ocena typu A:** Korzystając ze wzoru (2) oraz z poniższej tabeli obliczamy niepewność standardową czasu spadku ciała.

**Uwaga:** Należy zauważyć, że wiele kalkulatorów posiada wbudowane funkcje, które pozwolą znacznie przyspieszyć obliczenia sum występujących w używanych wzorach. W szczególności przydatne mogą być dwa klawisze:  $\bar{x}$  i  $\sigma_{n-1}$  (czasami oznaczany jako  $s$ ). Ten pierwszy klawisz służy do obliczenia średniej arytmetycznej wprowadzonego ciągu liczb, ten

drugi do obliczenia wartości wyrażenia  $\sqrt{\frac{\sum_i (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$  (nie mylić z niepewnością standardową  $u_A!$ ).

Nr pomiaru	$t_i$ [s]	$ \bar{t} - t_i $ [ms]	$ \bar{t} - t_i ^2$ [ms <sup>2</sup> ]
1	0,48	28	784
2	0,52	12	144
3	0,48	28	784
4	0,54	32	1024
5	0,52	12	144
Suma:			2880

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{2880 \text{ ms}^2}{5 \cdot 4}} = \sqrt{144} \text{ ms} = 12 \text{ ms} = 0,012 \text{ s}$$

**Ocena typu B:** Możemy zidentyfikować co najmniej dwie składowe tego typu niepewności: niepewność związana z chwilą włączenia i wyłączenia stopera  $\Delta t_1 = 0,04 \text{ s}$  oraz niepewność związana z działką elementarną stopera  $\Delta t_2 = 0,02 \text{ s}$ . Zakładając, że obie niepewności opisuje poprawnie rozkład prostokątny, z równania (7) otrzymamy

$$u_{B1}(t) = \frac{\Delta t_1}{\sqrt{3}} = 0,023 \text{ s} = 23 \text{ ms}, \quad u_{B2}(t) = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{3}} = 0,011 \text{ s} = 11 \text{ ms}. \text{ Całkowitą niepewność}$$

standardową typu B obliczymy korzystając z prawa przenoszenia niepewności standardowych

$$\text{– wzór (9): } u_B = \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2} = 25,5 \text{ ms}.$$

**Niepewność standardową całkowitą czasu  $u_c(t)$**  otrzymamy korzystając ze wzoru (11).  
**Zatem**

$$u(t) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 28,2 \text{ ms} = 0,0282 \text{ s}.$$

Końcowy wynik pomiaru czasu można zapisać w postaci:  $t = 0,508(0,028) \text{ s}$ .

**Oszacowanie niepewności standardowej (bezpośredniego) pomiaru wysokości  $u(h)$ :**

Ponieważ w tym przypadku nie wystąpił rozrzut wyników, więc poprzestaniemy na określeniu niepewności standardowej typu B. Tu także wyodrębnimy dwie składowe niepewności. Najmniejsza działka przyrządu pomiarowego wynosi w tym przypadku 1 mm, zatem  $\Delta h_1 = 1 \text{ mm}$ . Ponieważ pewien wpływ na wynik pomiaru może mieć również sposób ustawienia miarki oraz sposób odczytu, rozsądnie będzie przyjąć, że niepewność maksymalna wynikająca z tego rodzaju niedokładności będzie równa  $\Delta h_2 = 2 \text{ mm}$ . Zatem

$$u_{B1}(h) = \frac{\Delta h_1}{\sqrt{3}} = 0,57 \text{ mm}, \quad u_{B2} = \frac{\Delta h_2}{\sqrt{3}} = 1,15 \text{ mm}.$$

Całkowita niepewność standardowa wysokości będzie równa  $u(h) = \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2} = 1,28 \text{ mm}$ , więc wynik pomiaru wysokości zapiszemy jako  $h = 1270,0(1,3) \text{ mm}$ .

**Oszacowanie niepewności złożonej pomiaru pośredniego  $u_c(g)$ :**

W tym celu korzystamy ze wzoru (13). Obliczymy najpierw pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial g}{\partial h}(\bar{t}, \bar{h}) = \frac{2}{\bar{t}^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}, \bar{h}) = \frac{4\bar{h}}{\bar{t}^3}.$$

Podstawiając je do równania (13) i wykonując proste przekształcenia matematyczne otrzymamy wzór na niepewność standardową przyspieszenia

$$\begin{aligned} u_c(g) &= \sqrt{\left(\frac{2}{\bar{t}^2}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{4\bar{h}}{\bar{t}^3}\right)^2 u^2(t)} = \sqrt{\left(\frac{2\bar{h}}{\bar{t}^2\bar{h}}\right)^2 u^2(h) + \left(\frac{2\bar{h}}{\bar{t}^2} \frac{2}{\bar{t}}\right)^2 u^2(t)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{g}{\bar{h}}\right)^2 u^2(h) + \left(g \frac{2}{\bar{t}}\right)^2 u^2(t)} = g \sqrt{\left(\frac{u(h)}{\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{2u(t)}{\bar{t}}\right)^2} \end{aligned}$$

Ten ostatni wzór można także otrzymać bezpośrednio, wykorzystując równanie na niepewność bezwzględną funkcji  $ax^ny^m$ , umieszczone w szóstym wierszu tabeli 3. Należy jedynie zauważyć, że dla rozpatrywanej w tym przykładzie funkcji  $g=2h/t^2$  mamy  $a=2$ ,  $x=h$ ,  $n=1$ ,  $y=t$ ,  $m=-2$ . Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymamy:

$$u_c(g) = 9,842 \sqrt{0,0000010 + 0,0123269} = 1,09 \text{ m/s}^2 \approx 1,1 \text{ m/s}^2$$

Jak łatwo zauważyć, przyczynę do niepewności złożonej  $u_c(g)$  związany z niepewnością pomiaru wysokości okazał się zanedbywalnie mały w porównaniu z niepewnością pomiaru czasu. Aby zwiększyć dokładność wyznaczania przyspieszenia, należałoby zatem zwiększyć dokładność wyznaczania czasu. Końcowy rezultat pomiarów zapiszemy w postaci:

$$g = 9,8(1,1) \text{ m/s}^2$$

### Obliczenie niepewności rozszerzonej $U_c(g)$ :

Ponieważ dominujący wkład do niepewności całkowitej mają pomiary czasu spadku ciała, a te podlegają rozkładowi normalnemu, to możemy skorzystać z tabeli 4 i wybrać dla pożądanego poziomu ufności, np. 0,95, stosowną wartość współczynnika rozszerzenia  $k$ . Dla pięciu pomiarów,  $n=5$ , odczytujemy z tabeli 4 wartość  $k=2,776$ . Podstawiając ją do wzoru (14) otrzymujemy dla tego współczynnika rozszerzenia

$$U_c(g) = 2,776 u_c(g) = 2,776 \cdot 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cong 2,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ostatecznie końcowy rezultat pomiaru przyspieszenia ziemskiego, który możemy porównywać z wielkością tablicową, wygląda następująco:

$$g = (9,8 \pm 2,9) \text{ m/s}^2, \quad k = 2,776$$

Z prawdopodobieństwem około 95 % prawdziwa wartość przyspieszenia ziemskiego znajduje się w takim właśnie przedziale.

## I.8. Graficzna analiza danych pomiarowych

Graficzna analiza danych pomiarowych charakteryzuje się względną prostotą i poglądowością. Służy ona do rozwiązywania różnorodnych problemów: znajdowania wartości wielkości fizycznych (interpolacja i ekstrapolacja graficzna), szukania zależności funkcyjnej pomiędzy dwoma wielkościami, znajdowania wartości różnych parametrów, porównywania danych doświadczalnych z teorią itp. Wykres umożliwia rozpoznanie pomyłek eksperymentalnych, dlatego byłoby wskazane sporządzać prowizoryczny wykres już podczas wykonywania pomiarów.

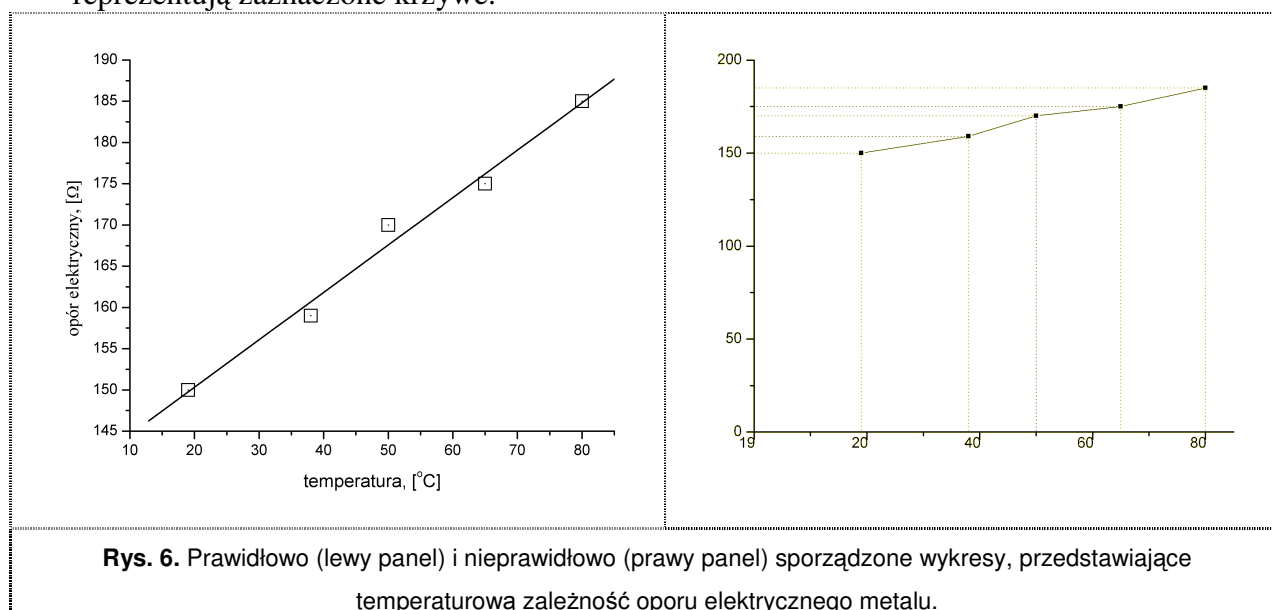
### I.8.1. Zasady sporządzania wykresów

Podczas sporządzania wykresu należy kierować się następującymi regułami:

1. Wykres wykonuje się na papierze milimetrowym lub na papierze z naniesioną specjalną siatką linii. Rozmiar wykresu określa zakres mierzonych wielkości i wybrana skala na osiach (a nie odwrotnie!). Można także używać komputera i specjalnych programów graficznych do sporządzania wykresów.

2. Na osi  $y$  odkładamy wartości funkcji, na osi  $x$  - wartości argumentów. Na przykład, aby wykreślić temperaturową zależność oporu metalu na osi  $x$  odkładamy temperaturę, na osi  $y$  - opór elektryczny.
3. Na każdej z osi odkładamy tylko taki zakres zmian mierzonej wielkości fizycznej w którym zostały wykonane pomiary. Nie ma zatem obowiązku odkładania na osiach np. punktów zerowych, gdy nie było w ich okolicy wykonanych pomiarowych.
4. Rozmiar wykresu nie jest dowolny i nie powinien wynikać z tego, że dysponujemy takim a nie innym kawałkiem papieru. Rozmiar powinien być określony przez niepewności pomiarowe tych wielkości, które odkłada się na osiach. Niepewności te powinny w wybranej skali być odcinkami o łatwo zauważalnej, znaczącej długości. Na przykład, wykonując pomiar oporu elektrycznego w funkcji temperatury mamy:  $u(T) = 1^\circ\text{C}$ ,  $u(R) = 1 \Omega$ . Wtedy przyrostowi  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  powinien odpowiadać na rysunku odcinek o długości np. 2 mm. Podobnie przyrostowi oporu  $\Delta R = 1 \Omega$  może także odpowiadać odcinek 2 mm.
5. Skale na każdej z osi wybiera się niezależnie, tak że mogą one być różne. Dążymy do tego, aby uzyskana krzywa lub jej główna część był pod kątem około  $45^\circ$  do osi układu współrzędnych.
6. Skalę na osiach układu nanosimy zazwyczaj w postaci równooddalonych, pełnych liczb. Ich wybór i gęstość na osi musi zapewniać jak największą prostotę i wygodę korzystania z nich.
7. Punkty na wykresie nanosimy tak, by były wyraźnie widoczne. Gdy na jednym rysunku ma być kilka krzywych, punkty na każdej z nich zaznacza się inaczej: kółkami, trójkątami, kwadracikami itp.
8. Po naniesieniu punktów pomiarów rysujemy ciągłą krzywą, bez nagłych zagięć i załamania. Powinna ona leżeć tak, aby ilość punktów po obu jej stronach była mniej więcej taka sama. Nie należy dążyć do tego, aby krzywa przechodziła przez wszystkie punkty, ponieważ każdy z nich obarczony jest niepewnością pomiaru. Łączenie punktów pomiarowych krzywą łamaną jest niedopuszczalne!
9. Pod osiami wykresu muszą być podane odkładane wielkości fizyczne i ich jednostki.
10. Aby wykres jak najbardziej odzwierciedlał zależność funkcyjną dwu wielkości, np. oporu metalu  $R$  i temperatury  $T$ , czasami na osiach odkłada się nie same wielkości, ale ich funkcje. Rodzaj takiej funkcji zależy od konkretnej sytuacji fizycznej. Na przykład, badając temperaturową zależność oporu elektrycznego półprzewodnika oczekuje się następującej zależności:  $R(T) = R_0 \exp(\alpha/T)$ . Gdybyśmy odkładali uzyskane wartości pomiarowe w takim układzie współrzędnych, że na osi  $x$  jest temperatura, a na osi  $y$  opór, to trudno byłoby stwierdzić, czy punkty pomiarowe układają się właśnie wzdłuż żądanej krzywej wykładniczej. Natomiast, gdy odłożymy punkty pomiarowe w układzie współrzędnych  $(1/T, \ln R)$  i znajdują się one na prostej, to potwierdzimy tym samym oczekiwaną zależność.
11. Na rysunku należy zaznaczyć niepewności pomiarowe w postaci prostokątów lub odcinków. Środek prostokąta leży w punkcie pomiarowym, a jego boki są równe podwojonej wartości niepewności pomiaru. W przypadku dużej liczby punktów pomiarowych wystarczy nanieść niepewności pomiarowe dla kilku punktów odłożonych równomiernie na wykresie.

12. Każdy rysunek powinien być podpisany. Podpis mówi, co rysunek zawiera, wyjaśnia co reprezentują zaznaczone krzywe.



Powyżej przedstawiono dwa rysunki, sporządzone na podstawie tych samych pomiarów. Ten po lewej stronie jest prawidłowo zrobiony, zgodnie z wyżej przedstawionymi wskazówkami. Rysunek po prawej stronie sporządzono nie kierując się tymi regułami.

### I.8.2. Regresja liniowa

Często spotykamy się z taką sytuacją, gdy dwie mierzone wielkości  $x$  i  $y$  związane są ze sobą równaniem liniowym. Tak jest np. w przypadku temperaturowej zależności oporu elektrycznego metali  $R = f(T)$ , skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła  $\varphi$  w funkcji stężenia roztworu cukru  $\varphi = f(c)$ , zależności okresu drgań relaksacyjnych  $T$  w obwodzie kondensatora i neonówki od pojemności kondensatora  $T = f(C)$ , itp. Wykonując pomiary dwu wielkości  $x$  i  $y$  uzyskujemy pary liczb  $(x_i, y_i)$  i naszym zadaniem jest znaleźć równanie linii prostej (tzn. wartości parametrów  $a$  i  $b$  w równaniu prostej), najlepiej "pasującej" do nich. Niech równanie to będzie miało postać

$$y = a \cdot x + b \quad (15)$$

a dopasowanie zgodnie z **metodą najmniejszych kwadratów** oznacza, że

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \text{minimum}$$

gdzie  $a$  i  $b$  są **empirycznymi współczynnikami regresji liniowej**. Jak łatwo zauważyć, wyrażenie w nawiasie w powyższym równaniu jest odchyleniem punktu eksperymentalnego (liczonym wzdłuż osi  $y$ ) od odpowiadającej mu wartości wynikającej z równania prostej. Zakładamy zatem, że niepewnością obarczone są jedynie wielkości  $y_i$ . Z różniczkowego warunku na minimum otrzymuje się dwa równania, których rozwiązanie pozwala obliczyć współczynniki  $a$  i  $b$ :



$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad b = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (16)$$

gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , czyli  $n$  jest ilością par punktów  $(x_i, y_i)$ . Odchylenia standardowe empirycznych współczynników regresji liniowej, będących miarą niepewności standardowych, otrzymuje się z następujących równań:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i}{n-2 \left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}} \quad u(b) = u(a) \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (17)$$

Kryterium tego, jak nasze punkty pomiarowe  $(x_i, y_i)$  potwierdzają liniową zależność pomiędzy wielkościami  $x$  i  $y$  stanowi wartość tzw. **współczynnika korelacji liniowej  $r$** . Jego wartość zmienia się w granicach od  $\pm 1$  do 0. Gdy  $|r| = 1$ , to dopasowanie jest idealne, wszystkie punkty pomiarowe leżą na prostej. Gdy  $r = 0$ , to zależność liniowa pomiędzy wielkościami  $x$  i  $y$  nie istnieje. W pomiarach fizycznych wartość współczynnika korelacji  $r$  jest zwykle większa niż 0,98. Współczynnik korelacji  $r$  obliczyć można z równania

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left[ n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \cdot \left[ n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right]}} \quad (18)$$

**Przykład.** Wykonując pomiary temperaturowej zależności oporu elektrycznego metalu otrzymano następujące rezultaty:

temperatura [°C]	19	38	50	65	80
opór [Ω]	150	159	170	175	185

Znaleźć równanie prostej najlepiej pasującej do tych danych oraz wartość współczynnika korelacji.

Jak łatwo zauważyć, wzory z których będziemy obliczać współczynniki prostej  $a$  i  $b$  zawierają różne sumy, które obliczymy na początku. W tym przypadku  $x_i$  odnoszą się do temperatury, a  $y_i$  do oporów elektrycznych,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 x_i &= 252 & \sum_{i=1}^5 y_i &= 839 & \sum_{i=1}^5 x_i^2 &= 14930 & \sum_{i=1}^5 y_i^2 &= 141531 \\ \sum_{i=1}^5 x_i y_i &= 43567 & n &= 5 & & & & \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane sumy do wzorów (16) - (18) otrzymamy parametry prostej oraz ich niepewności standardowe, a także wartość współczynnika korelacji liniowej:

$$\begin{aligned}
 a &= 0,575 & u(a) &= 0,039 \\
 b &= 138,8 & u(b) &= 2,1 & r &= 0,9931
 \end{aligned}$$

Tak więc wielkości oporu elektrycznego i temperatury spełniają równanie regresji liniowej o postaci

$$R(T) = 0,575(39) \cdot T + 138,8(2,1)$$

Punkty pomiarowe i prosta dana tym równaniem zostały pokazane na rys. 6 (lewy panel).

### I.8.3. Transformacja niektórych funkcji nieliniowych do postaci liniowej

Regresję liniową można zastosować do tych zależności nieliniowych, które przez odpowiednią transformację zmiennych można zlinearyzować. Rozpatrzmy te funkcje nieliniowe, które spotyka się w pracowni studenckiej.

a) **równanie typu**  $y = y_0 e^{ax} = y_0 \exp(ax)$ , gdzie  $y_0$  i  $a$  są stałymi, które należy wyznaczyć. Równanie tego typu opisuje np. zależność amplitudy drgań tłumionych od czasu,  $A(t) = A_0 \exp(-\beta t)$ , aktywność próbki promieniotwórczej w funkcji czasu,  $a(t) = a_0 \exp(-\lambda t)$ . Sprowadźmy tego typu równanie do postaci liniowej. W tym celu najpierw zlogarytmujmy je stronami, otrzymując  $\ln y = \ln y_0 + ax$ . Jeżeli zatem na osi rzędnych odłożymy  $\ln y = z$  to powyższe równanie będzie równaniem prostej:  $z = \ln y_0 + ax$ , gdzie  $b = \ln y_0$ .

b) **równanie typu**  $y = y_0 e^{(c/x)} = y_0 \exp(c/x)$ , gdzie  $y_0$  i  $c$  są stałymi do wyznaczenia. Z równaniem tego typu spotykamy się gdy badamy temperaturową zależność oporu elektrycznego półprzewodników,  $R(T) = R_0 \exp(-E_g/kT)$ , temperaturową zależność współczynnika lepkości cieczy,  $\eta(T) = \eta_0 \exp(E/RT)$ , zależność temperatury wrzenia wody od ciśnienia,  $p(T) = p_0 \exp(-E/RT)$ , itp. Aby sprowadzić takie równanie do postaci liniowej, należy je najpierw zlogarytmować stronami,  $\ln y = \ln y_0 = c/x$ , a następnie dokonać podstawienia:  $\ln y = t$ ,  $\frac{1}{x} = z$ . Wówczas otrzymamy równanie  $t = \ln y_0 + c \cdot z$ , które jest równaniem liniowym, wiążącym  $t$  i  $z$ . Zatem sporządzając wykres, należy na osi odciętych odłożyć  $1/x$  a na osi rzędnych  $\ln y$ .

### Literatura do rozdziału I

1. A.Zięba, 2001: Natura rachunku niepewności pomiarowych a jego nowa kodyfikacja. Postępy fizyki **52**, nr 5, s. 238-247.
2. H.Szydłowski, 2000: Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarowych. Postępy fizyki **51**, nr 2, s. 92-97.
3. H.Szydłowski, 2000: Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarowych a nauczanie. Fizyka w szkole, nr 4. s. 180-185.
4. Guide to Expression of Uncertainty in Measurement, ISO 1995, Switzerland. Tłumaczenie: Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik (Główny Urząd Miar Warszawa 1999).
5. B.N.Taylor, C.E.Kuyatt, Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results, NIST Technical Note 1297, 1994 Edition (w języku angielskim).
6. B.N.Taylor, Guide for the Use of the International System of Units (SI), NIST Special Publication 811, 1995 Edition (w języku angielskim).

**Dodatek 1.** Zestawienie najważniejszych elementów Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiarowej.

Wielkość	Symbol i sposób obliczania
Niepewność standardowa: ocena typu A (pomiary bezpośrednie)	Podstawa: statystyczna analiza serii pomiarów. Dla serii $n$ równoważnych pomiarów: $u_A(X) = \sqrt{s_{\bar{X}}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n(n-1)}}$ , gdzie $X \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
Niepewność standardowa: ocena typu B (pomiary bezpośrednie)	Podstawa: naukowy osąd eksperymentatora. Zwykle występuje kilka wkładów tego typu $u_B(X) = \frac{\Delta X}{\sqrt{3}}$ lub $u_B(X) = \frac{\Delta X}{\sqrt{6}}$ lub jeszcze inny (w zależności od założonego typu rozkładu)
Niepewność standardowa całkowita ocena typu A oraz typu B (pomiary bezpośrednie)	$u(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_{B1}^2(X) + u_{B2}^2(X) + \dots}$ (prawo przenoszenia odchyłeń standardowych)
Niepewność złożona (pomiary pośrednie)	Dla wielkości $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$ : $u_c(Y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k \left[ \frac{\partial f}{\partial X_j} (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k) \right]^2 u^2(X_j)}$ (gdy wszystkie wielkości $X_i$ są nieskorelowane)
Współczynnik rozszerzenia	$k \geq 2$
Niepewność rozszerzona	$U(X) = ku(X)$ lub $U_c(X) = ku_c(X)$
Zalecany zapis niepewności (przykład)	standardowa: $g = 9,781 \text{ m/s}^2$ , $u_c(g) = 0,076 \text{ m/s}^2$ $g = 9,781(76) \text{ m/s}^2$ $g = 9,781(0,076) \text{ m/s}^2$ rozszerzona: $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ , $U_c(g) = 0,15 \text{ m/s}^2$ , $k=2$ $g = (9,78 \pm 0,15) \text{ m/s}^2$ (obowiązuje zasada podawania 2 cyfr znaczących niepewności)