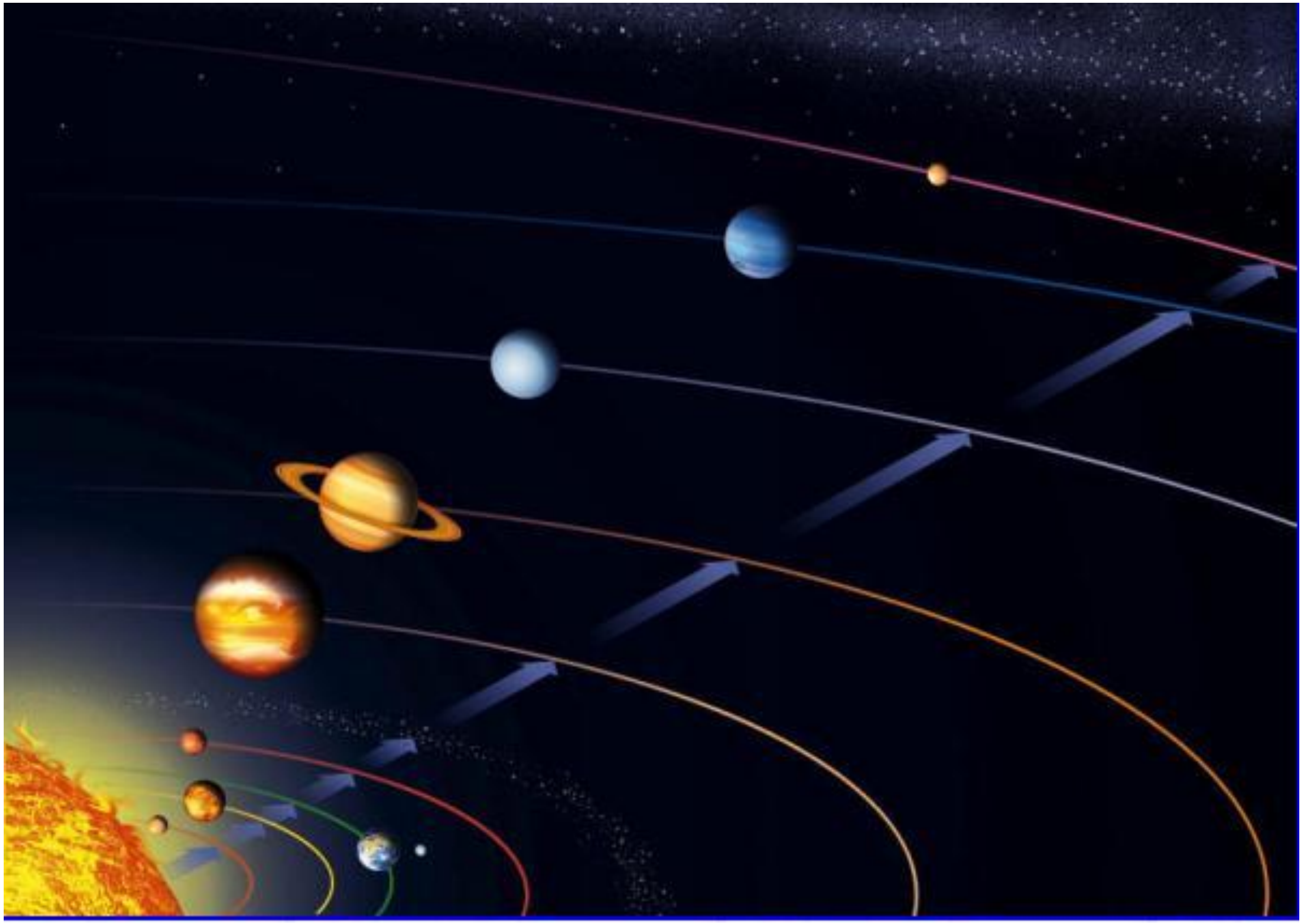
UKŁAD PUNKTÓW MATERIALNYCH – zbiór skończonej liczby punktów materialnych o zadanej konfiguracji przestrzennej.

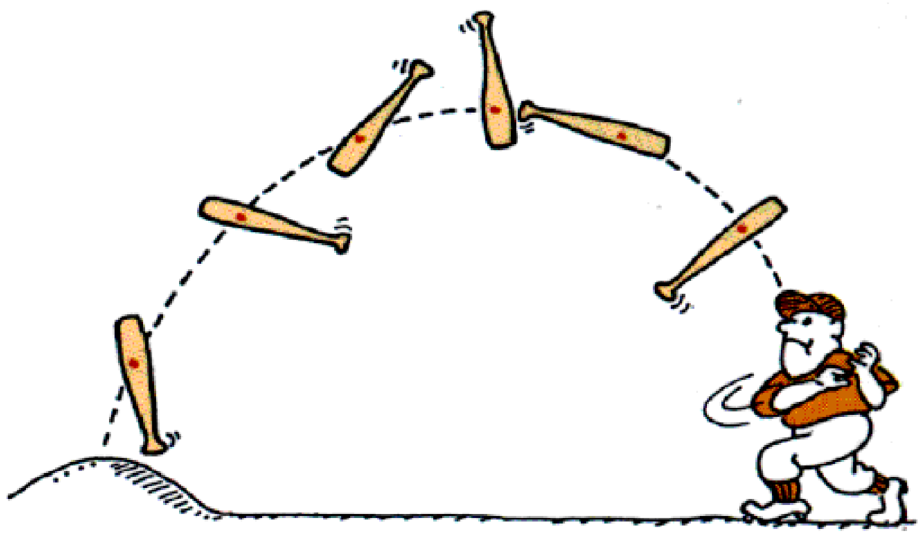


- Obłok Oorta
- Pas Kupiera
- Pluton
- Neptun
- Uran
- Saturn
- Jowisz
- Planetoidy
- Mars
- Księżyc
- Ziemia
- Wenus
- Merkury
- Słońce

Układ planetarny, w którym planety i Słońce można traktować jak układ punktów materialnych

ŚRODEK MASY (środek bezwładności)

Założmy, że układ jest złożony z n punktów materialnych o masach: $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$



Rys. źródło: http://semesters.in

Środek masy ciała *(lub układu ciał)* to punkt geometryczny, który porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona cała masa układu, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

Położenie punktu ś.m., dane jest wzorem:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

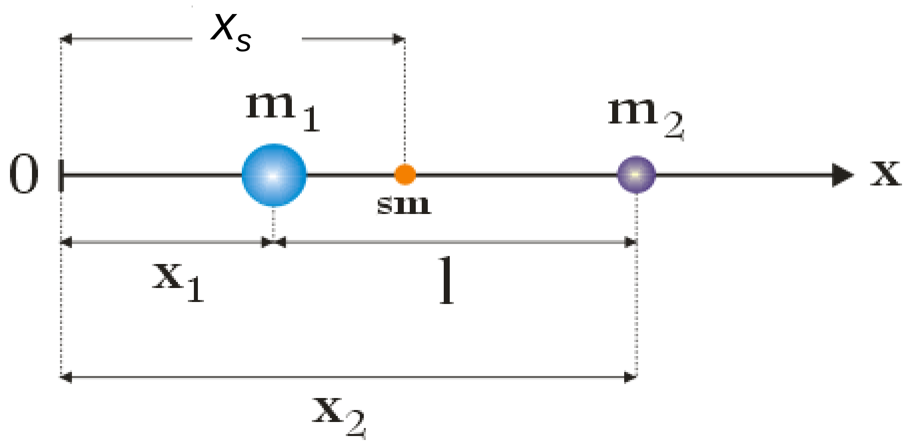
wektor położenia ciała o masie m_i

wektor położenia środka masy układu ciał

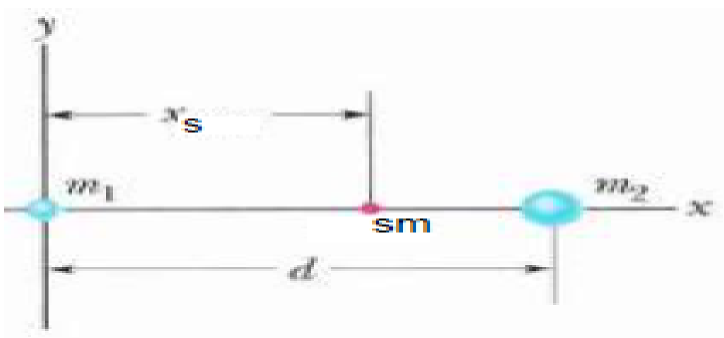
Masa całego układu

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

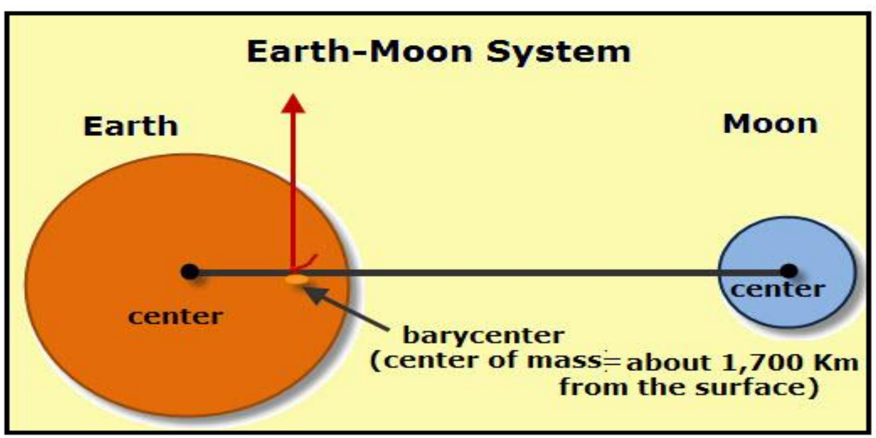
Przykłady- środek masy układu ciał



$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



$$x_s = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$



Dane:

$m_K = 7{,}35 \cdot 10^{22} kg$

$M_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24} kg \approx 6 \cdot 10^{24} kg$

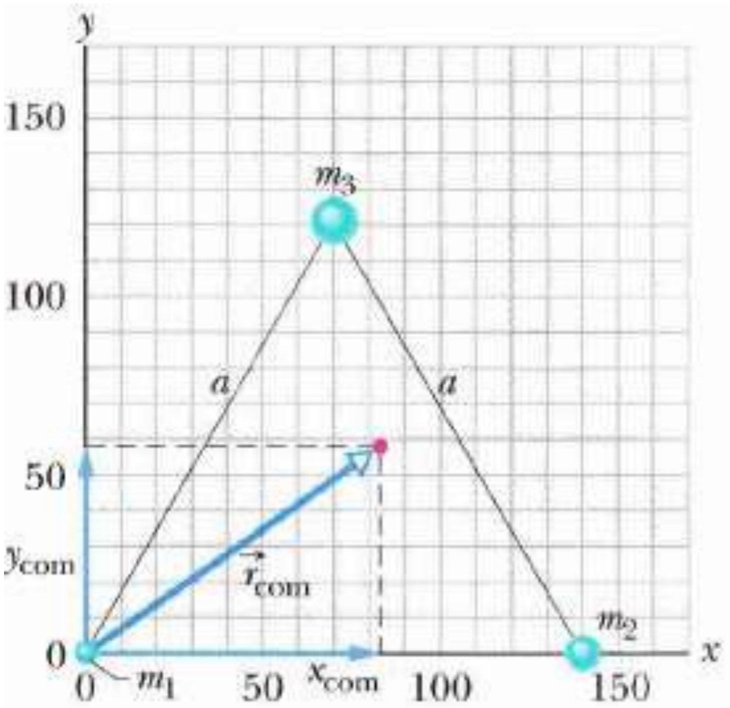
$d = 384400 km$

$R_Z = 6378{,}14 km$

$$x_S = \frac{m_K}{M_Z + m_K} \cdot d$$

$$x_S = 4667{,}28 km$$

Przykład.



Rys. źródło: D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, "Podstawy fizyki ".

Cząstka	Mass (kg)	x (cm)	y (cm)
1	1.2	0	0
2	2.5	140	0
3	3.4	70	120

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M}$$

$$= \frac{(1.2\text{ kg})(0) + (2.5\text{ kg})(140\text{ cm}) + (3.4\text{ kg})(70\text{ cm})}{7.1\text{ kg}}$$

$$= 83\text{ cm}$$

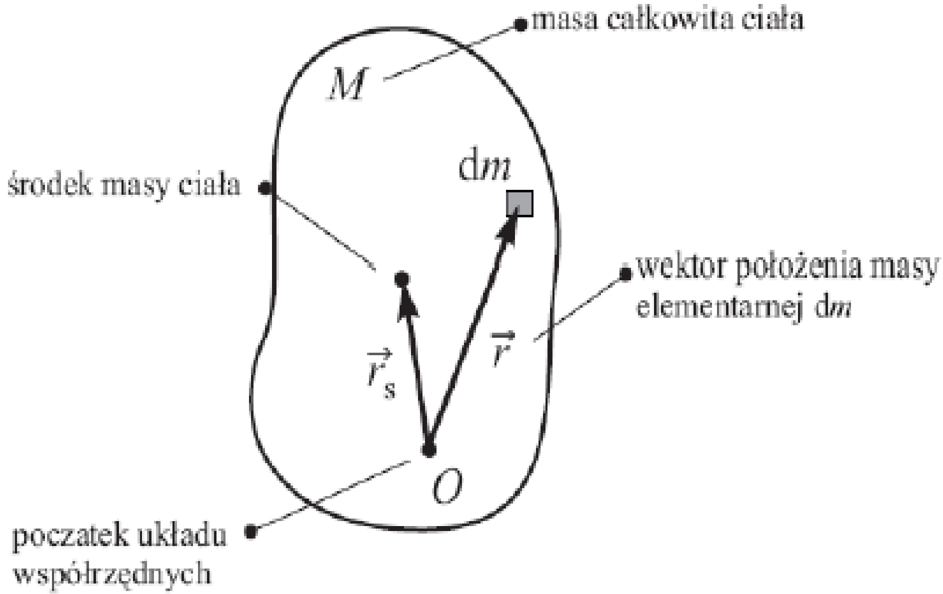
$$\frac{1}{\ }\cdot\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M}$$

$$= \frac{(1.2\text{ kg})(0) + (2.5\text{ kg})(0) + (3.4\text{ kg})(120\text{ cm})}{7.1\text{ kg}}$$

$$= 58\text{ cm}.$$

Środek masy – ciało rozciągłe

Obiekt o ciągłym rozkładzie masy



W przypadku ciała o ciągłym rozkładzie masy dzielimy je w myśli na n- małych części o masach $dm_1, dm_2, ..., dm_n$
Wzór (3.1) przyjmuje:

$$\vec{r}_S = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}$$

Granice sum w powyższym wzorze wyrażają się odpowiednimi całkami oznaczonymi, stąd **PROMIEŃ WODZĄCY ŚRODKA MASY**:

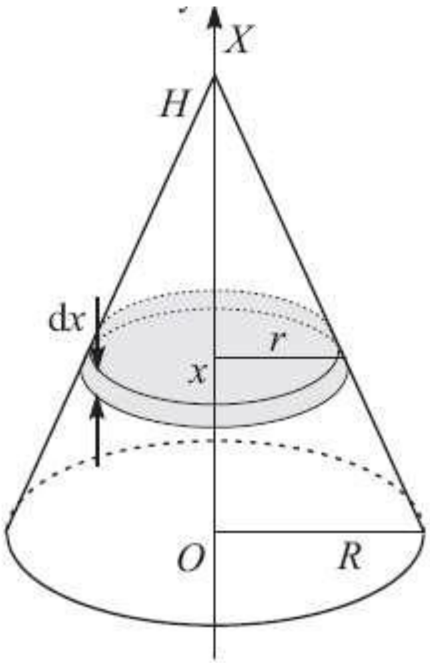
$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{\int_0^M \vec{r}\,dm}{\int_0^M dm} = \frac{1}{M}\int_0^V \vec{r}\rho\,dV}$$

wektor położenia środka masy danego ciała

całkowita masa

$$\rho = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$ - gęstość ciała.

Środek masy – ciało rozciągłe. Przykład



$$\frac{R}{r} = \frac{H}{H-x}$$

$$x_s = \frac{1}{M}\int_M x\,\mathrm{d}m$$

$$M = \rho V = \rho\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\mathrm{d}m = \rho\frac{(H-x)^2}{H^2}\pi R^2\mathrm{d}x$$

$$x_s = \frac{1}{4}H$$

Stożek jest bryłą symetryczną – środek masy leży na osi symetrii.

PĘD UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

(przypomnienie)

- Każde ciało można traktować jako **układ punktów materialnych.** Dlatego **pęd ciała** możemy obliczyć jako **sumę pędów wszystkich n- punktów materialnych ciała:**

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}$$

- Pamiętając o wyrażeniu na prędkość:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$$

- Po podstawieniu do wyrażenia (3.6) wzoru (3.1) , otrzymamy:

$$\vec{p}_{sm} = \frac{d}{dt}\boxed{\left(M\vec{r}_S\right)} = M \boxed{\frac{d\vec{r}_S}{dt}} = \boxed{M\vec{v}_S}$$

pęd środka masy układu

Zatem:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N}(m_i \cdot \vec{\upsilon}_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = M \cdot \vec{\upsilon}_{sm} = \vec{p}_{sm}}$$

Suma pędów układu punktów materialnych **=** **Pędowi jego środka masy**

Prędkość środka masy

masy poszczególnych ciał

$$\vec{v}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

wektor prędkości ciała o masie m_i

wektor prędkości środka masy układu ciał

masa całego układu $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

Przyspieszenie środka masy

wektor przyspieszenia ciała o masie m_i

$$\vec{a}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

wektor przyspieszenia środka masy układu ciał

II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA DLA UKŁADU CZĄSTEK

Założenie: M – całkowita masa układu nie może się zmieniać – **układ zamknięty.**

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 \;, \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \;, \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_3, \ldots, \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_n$$

Sumując stronami: $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ oraz uwzględniając zależność: $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_{sm}}{dt}$

Otrzymujemy **równanie ruchu środka masy układu** :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{sm}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

II zasada dynamiki Newtona dla układu cząstek

Szybkość zmian pędu środka masy układu cząstek jest równa wypadkowej sił działających na układ i ma kierunek tej siły.

II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA DLA UKŁADU CZĄSTEK

Z **równania ruchu środka masy układu** wynika, *twierdzenie o ruchu środka masy*:

Środek masy układu punktów materialnych porusza się tak, jak punkt materialny, w którym skupiona jest całkowita masa układu i na który działa siła, równa wypadkowej sił zewnętrznych przyłożonych do układu.

- Inna postać **II ZASADY DYNAMIKI NEWTONA DLA UKŁADU CZĄSTEK :**

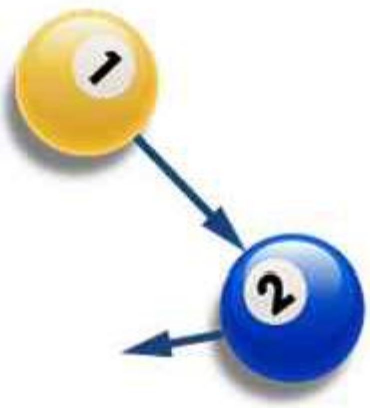
$$\boxed{\vec{F}_{wyp} = M\vec{a}_S}$$

F_{wyp} – wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych

M – całkowita masa układu

a_s – przyspieszenie środka masy

Co nazywamy układem ciał (w rozumieniu fizyki, mechaniki) ?



Rys. Kule bilardowe (przed zderzeniem).

Układ ciał w fizyce (mechanice), to zbiór ciał, myślowo wyodrębniony od otoczenia

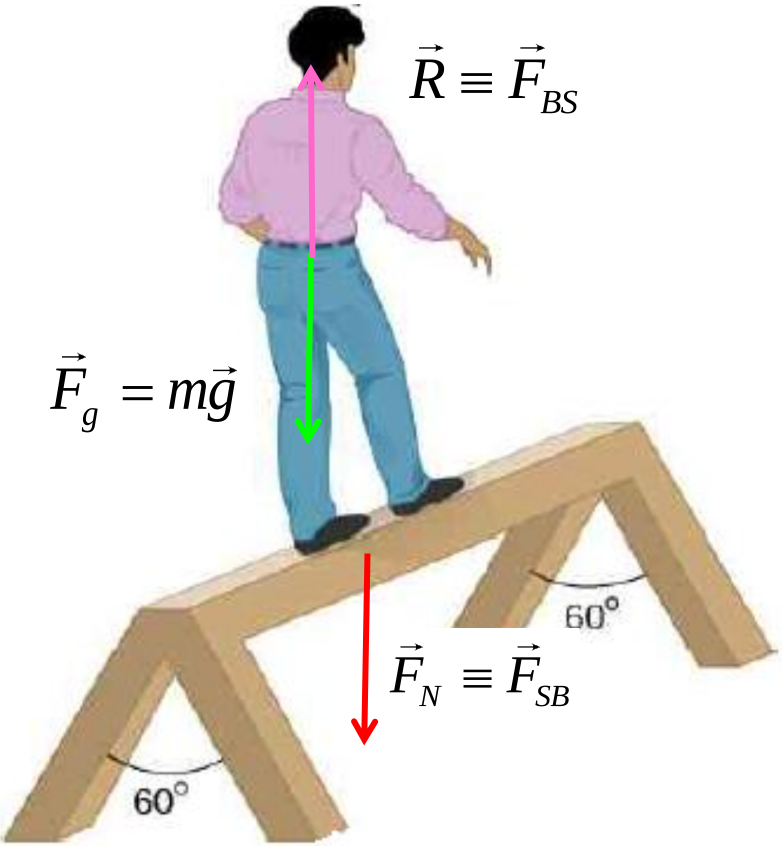
- Kiedy układ jest izolowany lub odosobniony ?

Jeżeli ciała stanowiące otoczenie nie wywierają sił na ów układ, albo siły zewnętrzne znoszą się.

Co nazywamy siłami zewnętrznymi a co siłami wewnętrznymi układu?

Weźmy przykład Studenta stojącego na belce (rys.).

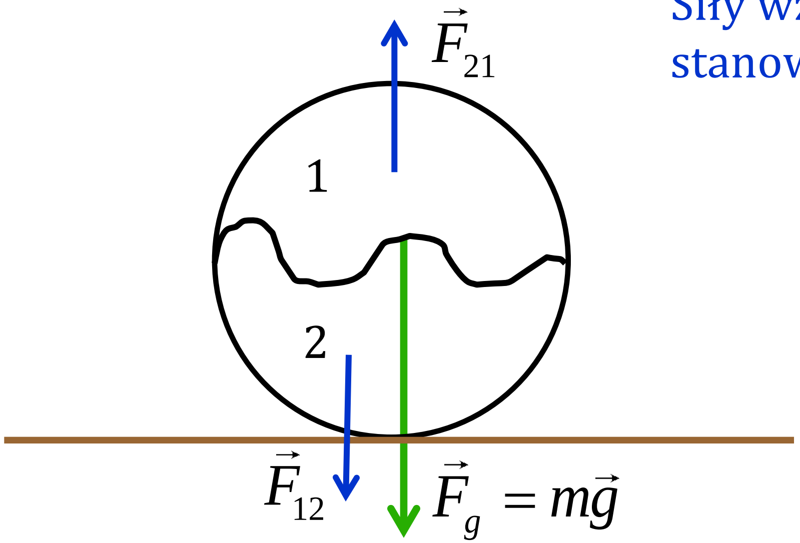
•Siły wewnętrzne,
to siły , które działają między ciałami tworzącymi układ (np. F_{SB} oraz F_{BS}).



Rys. Przykładowy układ: Student- belka

•Siły zewnętrzne, to siły, które działają na układ z zewnątrz od ciał nie należących do układu (np. F_g)

Przykład- Związek między działającą siłą a zmianami pędu ciała



Rys. Pocisk składający się z dwóch części spoczywający na podłodze.

Siły wzajemnego nacisku dwóch części : $\vec{F}_{21}$ i $\vec{F}_{12}$ stanowią siły wewnętrzne układu.

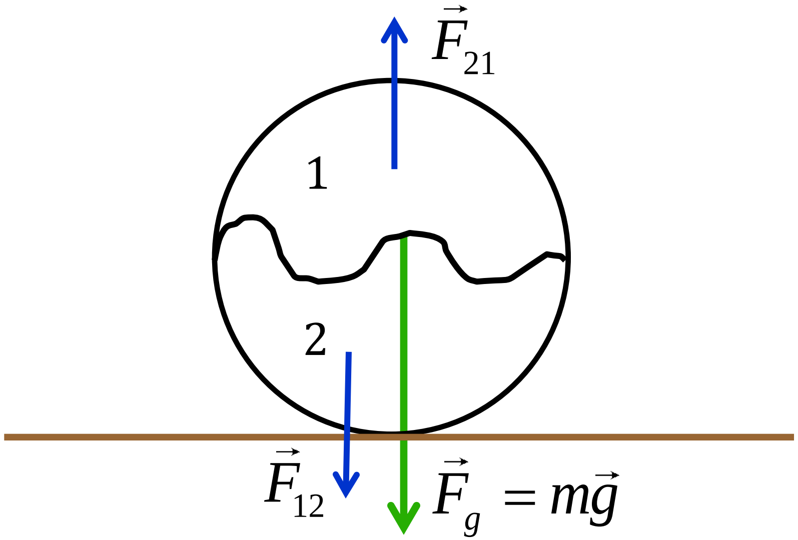
Pamiętamy związek pomiędzy działającą siłą a zmianami pędu ciała:

$$\boxed{\vec{F}_z = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

(siła zewnętrzna)

Jeżeli siła zewnętrzna $\vec{F}_z = 0$, to pęd układu ciał pozostaje stały.

Przykład- Związek między działającą siłą a zmianami pędu ciała



Rys. Pocisk składający się z dwóch części spoczywający na podłodze.

Prawo pędu i popędu dla każdego z ciał (1 i 2) :

$$Fdt = m_1 \cdot \Delta v_1$$

$$-Fdt = m_2 \cdot \Delta v_2$$

Dodając stronami otrzymujemy:

$$m_1 \cdot \Delta v_1 + m_2 \cdot \Delta v_2 = 0$$

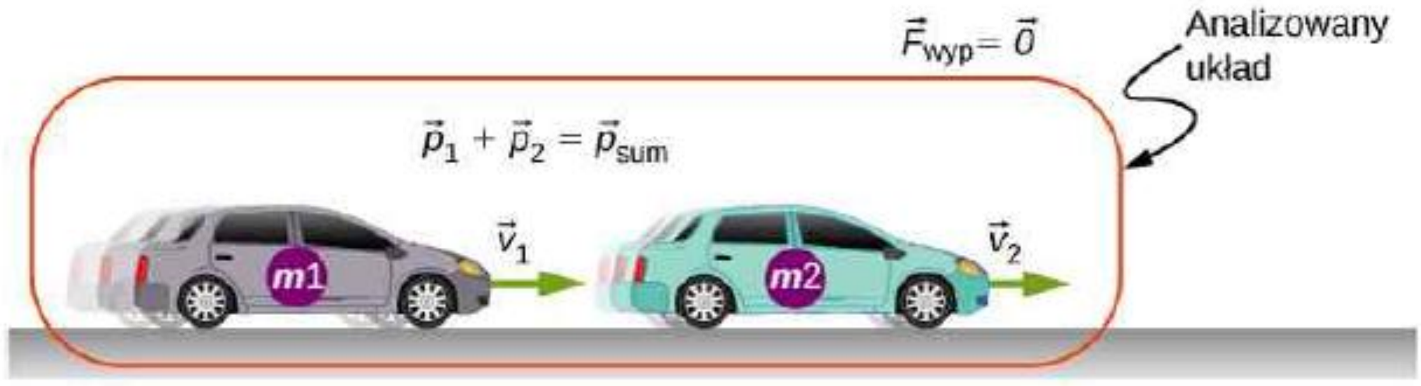
Suma przyrostów pędu równa jest zero!

Wniosek: Siły wewnętrzne $\vec{F}_{12}$ i $\vec{F}_{21}$ zmieniają wprawdzie pędy poszczególnych części układu, ale suma tych zmian jest równa zeru. Siły wewnętrzne nie maja wpływu na pęd całego układu.

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

Jeśli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru, to całkowity pęd układu nie ulega zmianie.

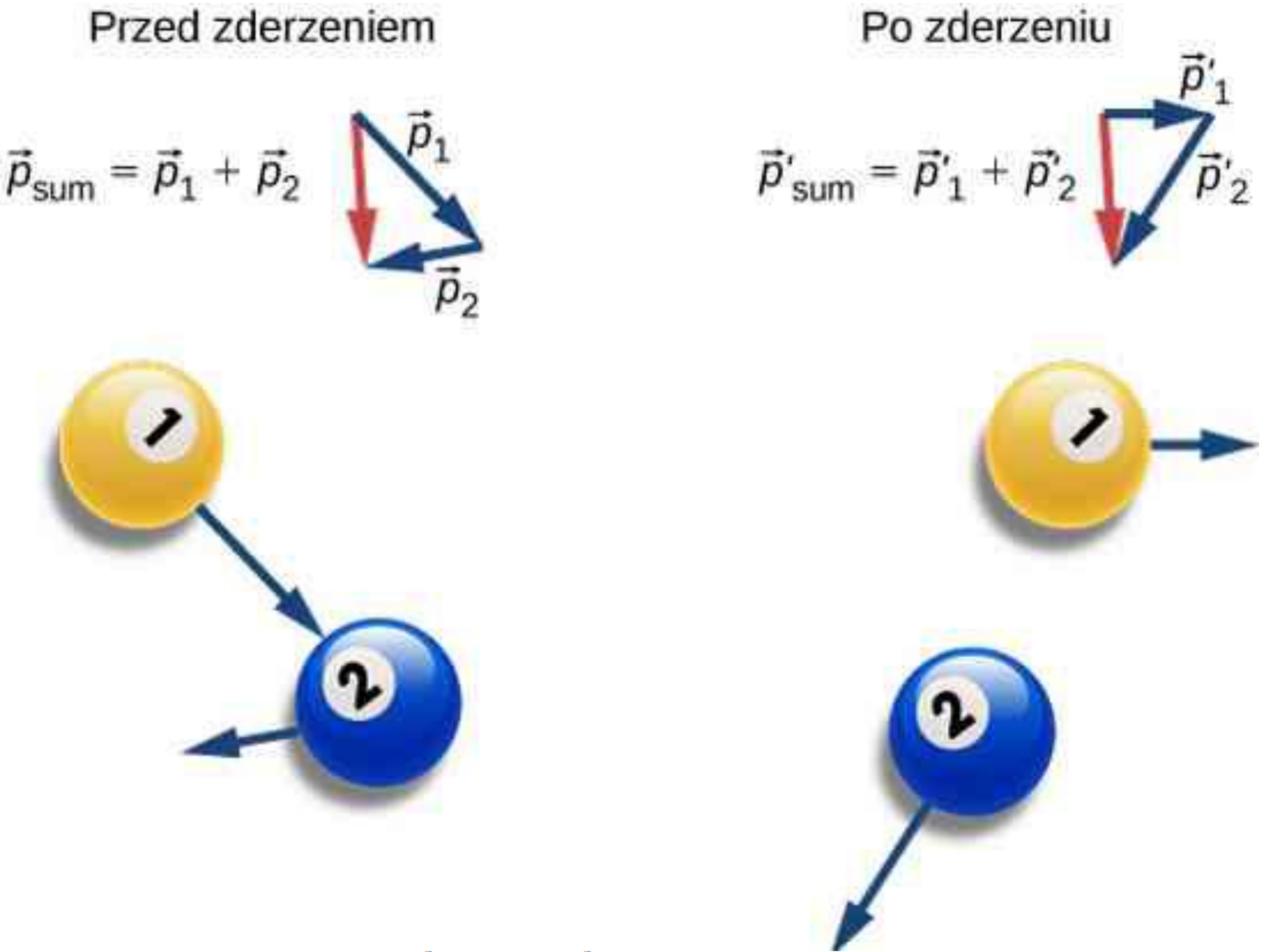
$$\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{n} (\vec{p}_i) = const.$$



- Siły wewnętrzne działające między ciałami tworzącymi układ , mogą zmieniać pędy poszczególnych części układu lecz suma tych zmian jest równa zeru.
- Siły wewnętrzne nie mogą zmieniać pędu środka masy układu.
- Podczas oddziaływania ciał między sobą możliwa jest wprawdzie wymiana masy między nimi, ich sklejenie lub rozpad na drobniejsze elementy, ale masa całkowita układu musi pozostać stała.

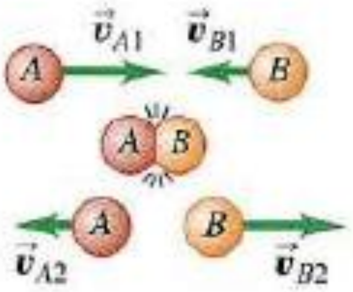
Rys. źródło: „*Fizyka dla szkół wyższych* S. Ling, , J.Sanny, W. Moebs

Przykład- zderzające się kule bilardowe

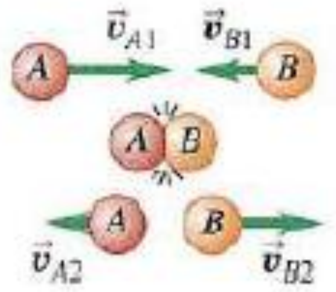


$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$$

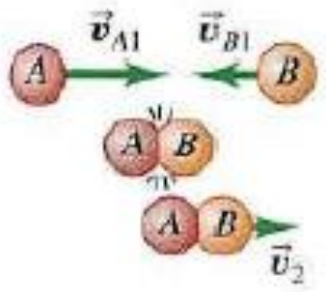
Rys. Pęd jest wielkością wektorową ,stąd całkowity pęd układu jest zawsze sumą geometryczną poszczególnych części układu. Rys. źródło: „*Fizyka dla szkół wyższych* S. Ling, , J.Sanny, W. Moebs zderzenie sprężyste, $\Delta E_k=0$



zderzenie niesprężyste, $\Delta E_k \neq 0$



zderzenie całkowicie niesprężyste



suma pędów przed zderzeniem lub rozpadem

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{j=1}^{M} \vec{p}\,'_j}$$

suma pędów po zderzeniu lub rozpadzie

- Niezależnie czy zderzenie jest sprężyste, czy niesprężyste, jeśli zachodzi w układzie izolowanym, to pęd układu ciał nie zmienia się.

Przykład 1. Zgodnie z legendą Wilhelm Tell strzałą wystrzeloną z kuszy, miał zestrzelić jabłko o masie M= 0,2 kg umieszczone na głowie swojego syna. Przyjmując, że masa strzały wynosi m=0,05 kg i przebija centralnie jabłko z prędkością poziomą v_0=100m/s. Obliczyć w jakiej odległości upadła strzała. Wysokość chłopca wynosi h=1,5 m, a jabłko upadło w odległości S=5m.

Rozwiązanie

Dane :

$M = 0{,}2\ kg$

$v_0 = 100\ \frac{m}{s}$

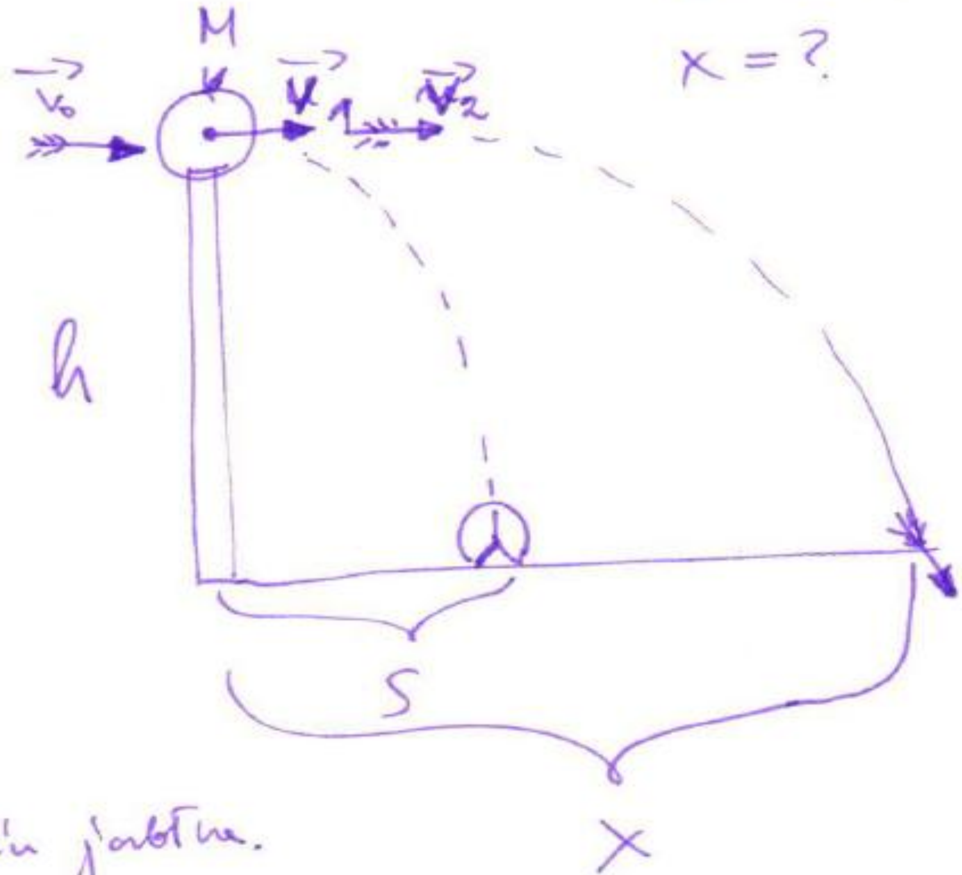
$m = 0{,}05\ kg$

$h = 1{,}5\ m$

$S = 5\ m.$

Szukane :

$x = ?$



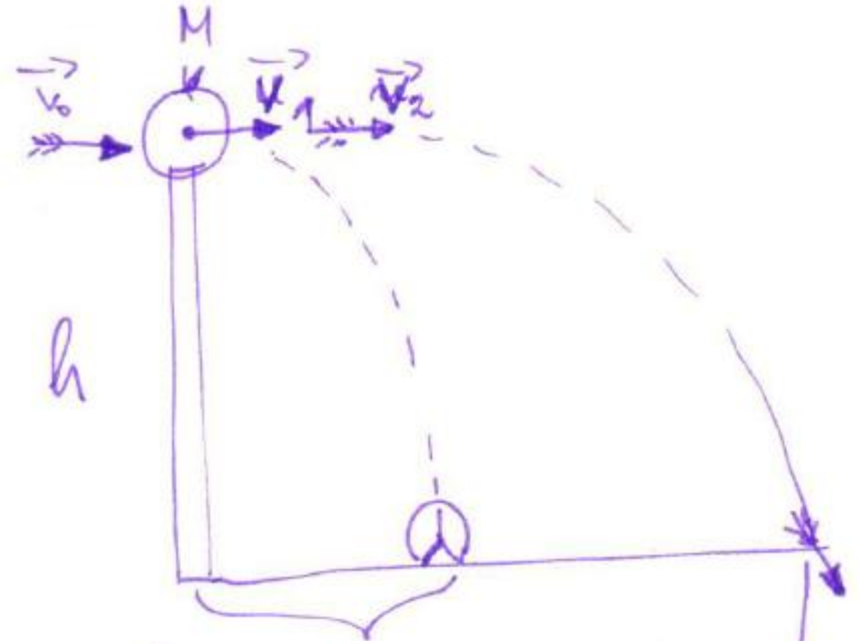
v_0 – pr. pocz. str.

V_1 – pr. jabłka

V_2 – pr. strzały po przebiciu jabłka.

przy czym $V_2 > V_1$

P.1- rozwiązanie



Z zasady zachowania pędu : 1) $m \cdot v_0 = M \cdot V_1 + m \cdot V_2$

Mamy dwa niezależne rzuty poziome z wys. h; ich zasięgi wynoszą :

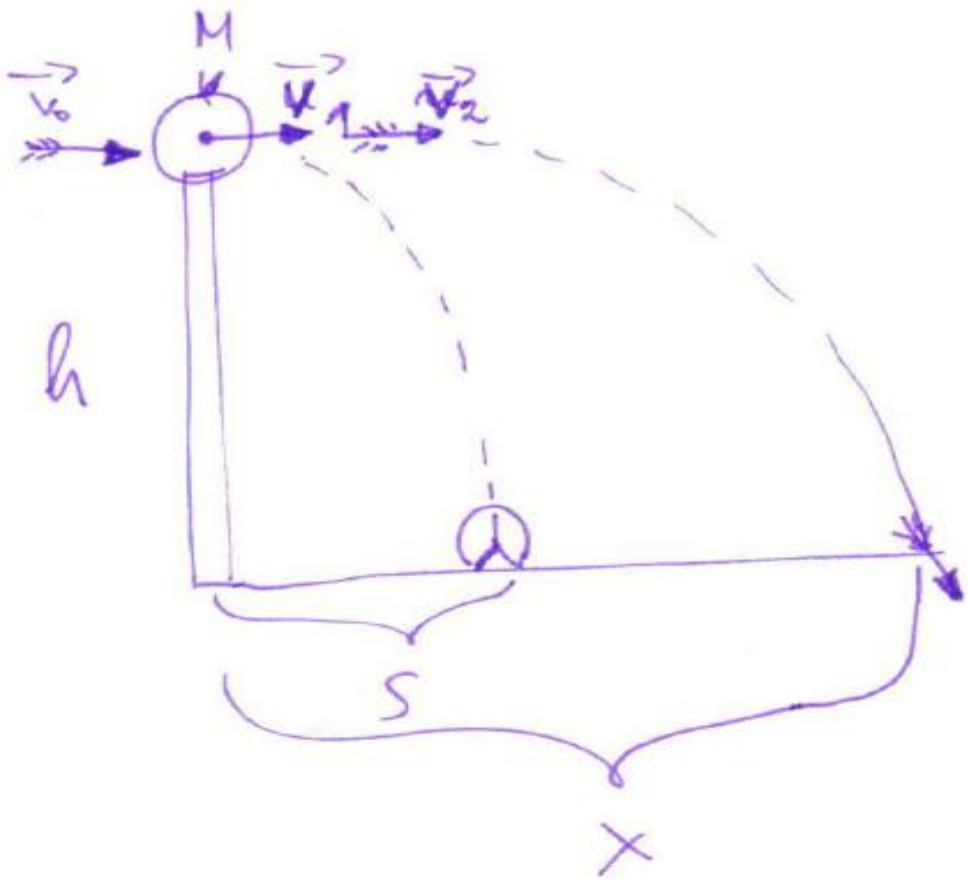
$$2)\ \begin{cases} S = V_1 \cdot t \\ X = V_2 \cdot t \end{cases}$$

ponieważ $h = \dfrac{a \cdot t^2}{2}$

stąd $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

zatem : $V_1 = \dfrac{S}{\sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$

8,28 x 11,69 cale



z ①:

$$m V_2 = m \cdot v_0 - M \cdot \frac{S}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$$V_2 = V_0 - \frac{M}{m} \cdot S \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

Otrzymujemy :

$$X = V_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m} \cdot S \sqrt{\frac{\cancel{g}}{\cancel{2h}} \cdot \frac{\cancel{2h}}{\cancel{g}}},$$

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m} \cdot S \Rightarrow \text{Odp. } X = \underline{\underline{35\,m}}$$

RUCH OBROTOWY -przypomnienie

Jakie zmienne opisują ruch obrotowy w zastosowaniu do obrotu wokół stałej osi?

❖ Chwilowa wartość prędkości kątowej :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt},$$

❖ Chwilowe przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

❖ Zależność między prędkością kątową a prędkością liniową:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

❖ Zależność pomiędzy przyspieszeniem stycznym a kątowym:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}.$$

Przykład 2- wirujące koło rowerowe

Mechanik rowerowy umieszcza rower w stojaku do naprawy rowerów i zaczyna obracać tylne koło. W czasie 5,00 s od początku ruchu osiąga ono prędkość kątową wynoszącą 250 obrotów na minutę.

a. Wyznacz w rad/s^2 średnie przyspieszenie kątowe.

b. Po jakim czasie koło się zatrzyma, jeżeli mechanik wciśnie hamulec, wytwarzając przyspieszenie kątowe o wartości $-87{,}3$ rad/s^2 ?

Rozwiązanie

Dane:
$\Delta t = 5$s
$\omega = 250$ obr/min
$\varepsilon = -87{,}3$ rad/s^2

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Szukane:
a) $\varepsilon_{śr} = ?$
b) $\Delta t = ?$

$$\Delta\omega = \omega_{\text{konc}} - \omega_{\text{pocz}} = 250 \text{ obr/min}$$

Zamiana jednostek: $$\Delta\omega = 250\,\frac{\text{obr}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\,\text{rad}}{\text{obr}} \cdot \frac{1\,\text{min}}{60\,\text{s}} = 26{,}2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{26{,}2\,\text{rad/s}}{5{,}00\,\text{s}} = 5{,}24\,\text{rad/s}^2.$$

Przykład 2- wirujące koło rowerowe c.d.

ad b)

$\Delta t = ?$

$$\Delta t = \frac{\Delta \omega}{\varepsilon}$$

Teraz prędkość kątowa maleje
od wartości 26,2 rad/s do zera, stąd:

$$\Delta \omega = -26{,}2 \text{ rad/s}$$

Czas potrzebny na zatrzymanie koła:

$$\Delta t = \frac{-26{,}2 \text{ rad/s}}{-87{,}3 \text{ rad/s}} = 0{,}300 \text{ s.}$$

Znaczenie

Należy zauważyć, że gdy mechanik obraca koło, przyspieszenie kątowe jest małe i dodatnie; potrzeba 5 sekund do osiągnięcia znacznej prędkości kątowej.
Kiedy wciśnie on hamulec, przyspieszenie kątowe jest duże i ujemne. Prędkość kątowa szybko maleje do zera.

Przykład 3- koło samochodowe

Samochód jedzie z szybkością 110 km/h. Koła samochodu mają średnicę 60 cm. Oblicz:

a) prędkość kątową kół
b) okres T,
c) ile obrotów zrobią koła samochodu w czasie t=0,5h.

Rozwiązanie

Dane:
v_0 = 110 km/h=30,6 m/s
t=0,5h = 1800s
r= 0,3m

Szukane:
a) ω =?
b) T =?
c) n=?

a) $$\omega = \frac{v_0}{t} \Rightarrow \omega = 102 \frac{rad}{s}$$

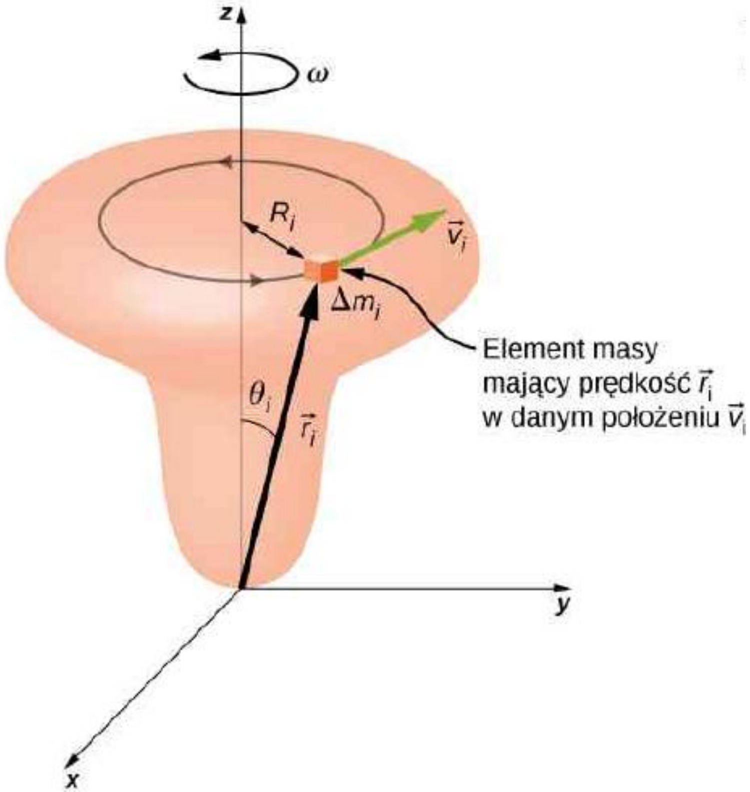
b) $$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{102} \frac{rad}{\frac{rad}{s}} = 0{,}062s$$

c) $$T = \frac{t}{n}, \; stąd \; n = \frac{1800s}{0{,}062s} = 29\ 032 \; obrotów$$

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ

- Każde ciało możemy uważać za układ ***n*** punktów materialnych, których suma mas równa się całkowitej masie M ciała:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



Pier\

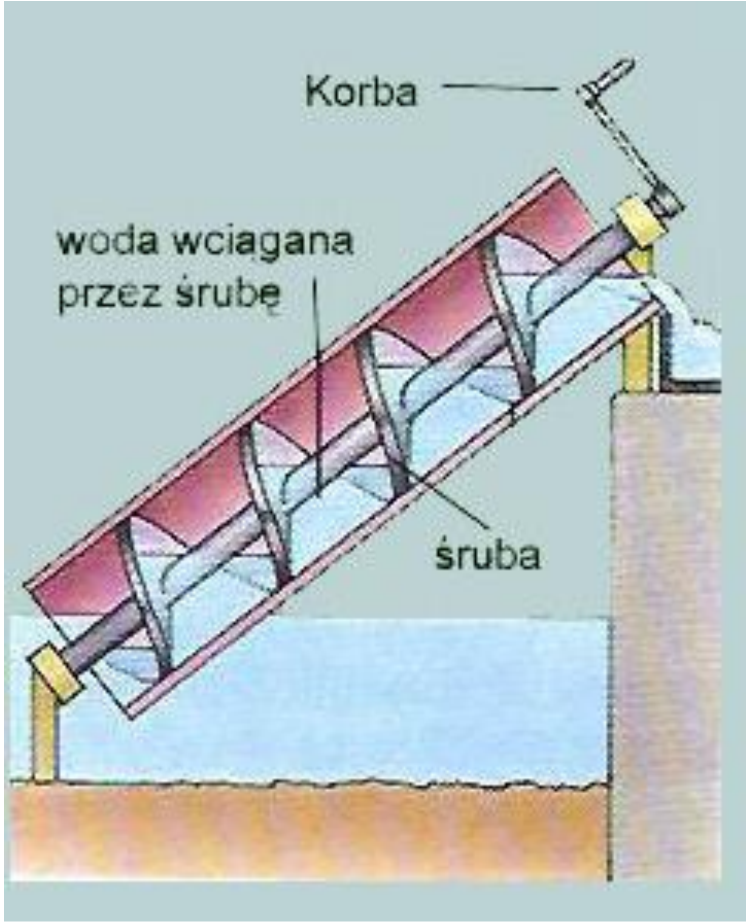
Bryła sztywna

Ciało fizyczne, którego poszczególne punkty pozostają w stałych odległościach od siebie, niezależnie od działających sił lub momentów sił.

Bryła sztywna ma stałą gęstość, zachowuje swój kształt oraz objętość.

Dla bryły sztywnej obowiązują wszystkie wnioski i zależności słuszne dla układu punktów materialnych

DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ



Rodzaje ruchów bryły sztywnej:

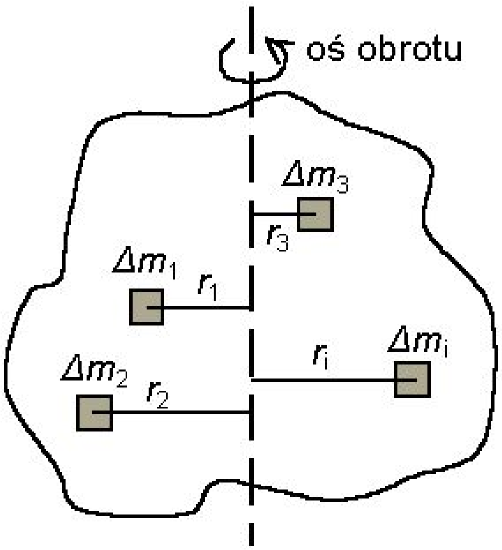
a) **ruch postępowy-** dowolny odcinek łączący dwa dowolne punkty bryły pozostaje równoległy do swoich poprzednich położeń.

b) **ruch obrotowy –** wszystkie punkty danego ciała poruszają się po okręgach, których środki znajdują się na jednej prostej – osi obrotu.

Rys. Pierwszym człowiekiem, który opisał śrubę, był grecki uczony i fizyk –Archimedes (około 287-212 p.n.e.). W całym antycznym świecie śruba Archimedesa używana była do podnoszenia poziomu wody.

Prędkość i przyspieszenie punktów poruszających się ruchem obrotowym nie są jednakowe dla wszystkich punktów, ale zależne są od odległości od osi obrotu.

MOMENTEM BEZWŁADNOŚCI - wielkość charakterystyczna dla danego ciała i określonej osi obrotu:



$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (\omega_i r_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2}$$

I

$$I = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \ldots + \Delta m_i r_i^2 + \ldots + \Delta m_N r_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2$$

r_i -jest odległością i-tego punktu od osi obrotu,
Δm_i -oznacza masę i-tego punktu.

W przypadku ciał rzeczywistych, takich dla których masa jest rozłożona w sposób ciągły stosuje się postać całkową definicji pozwalającą obliczać rzeczywiste momenty bezwładności:

POSTAĆ CAŁKOWA:

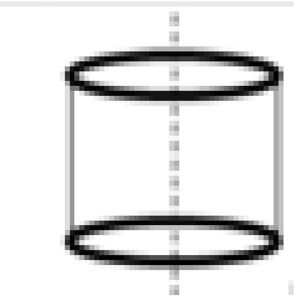
$$\boxed{I = \lim_{N \to \infty} \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int_M r^2 dm}$$

gdzie: r^2- oznacza zmienną określającą odległość elementu masy dm od osi obrotu.

Momenty bezwładności kilku popularnych brył:

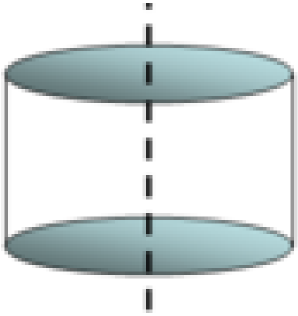
a) rura

$$I = m \cdot r^2$$



b) walec pełny

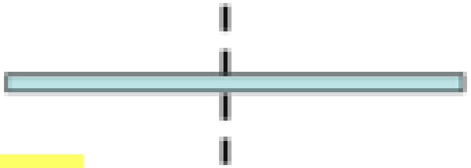
$$I = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$



c) kula

$$I = \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

d) pręt



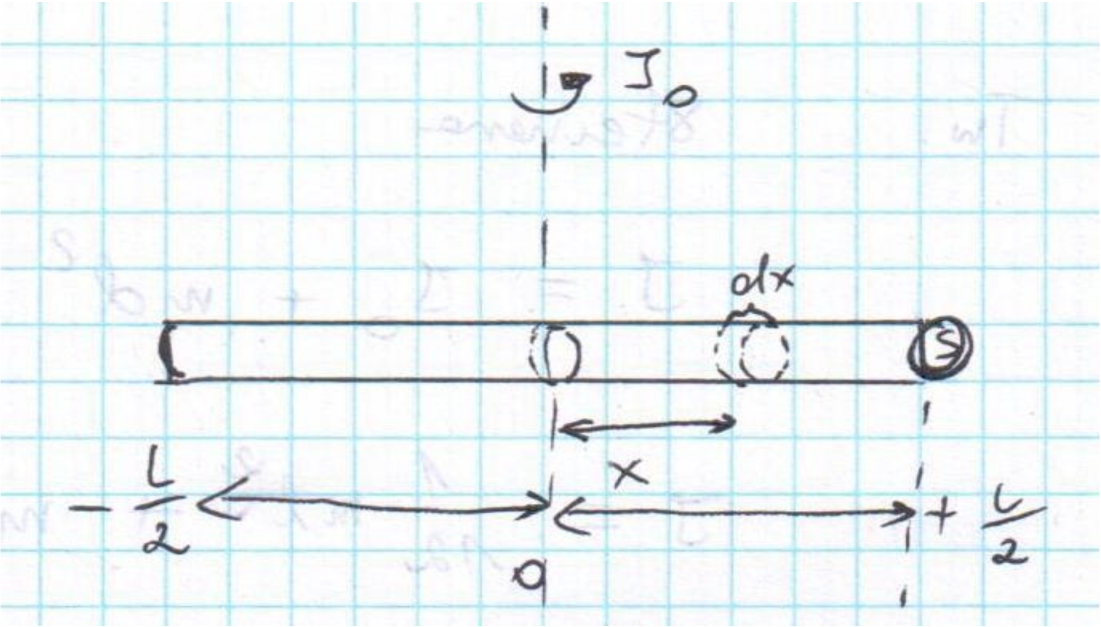
$$I = \frac{1}{12} m \cdot r^2$$

(WYPROWADZENIA WZORÓW NA TABLICY)

Przykład 3 – monet bezwładności cienkiego pręta

P1. Wyznacz moment bezwładności (***I***) cienkiego jednorodnego pręta o masie ***m*** i długości ***l*** (rys.) względem osi: (a) przechodzącej przez jego środek, (b) przechodzącej przez jeden z jego końców.

I_0=?



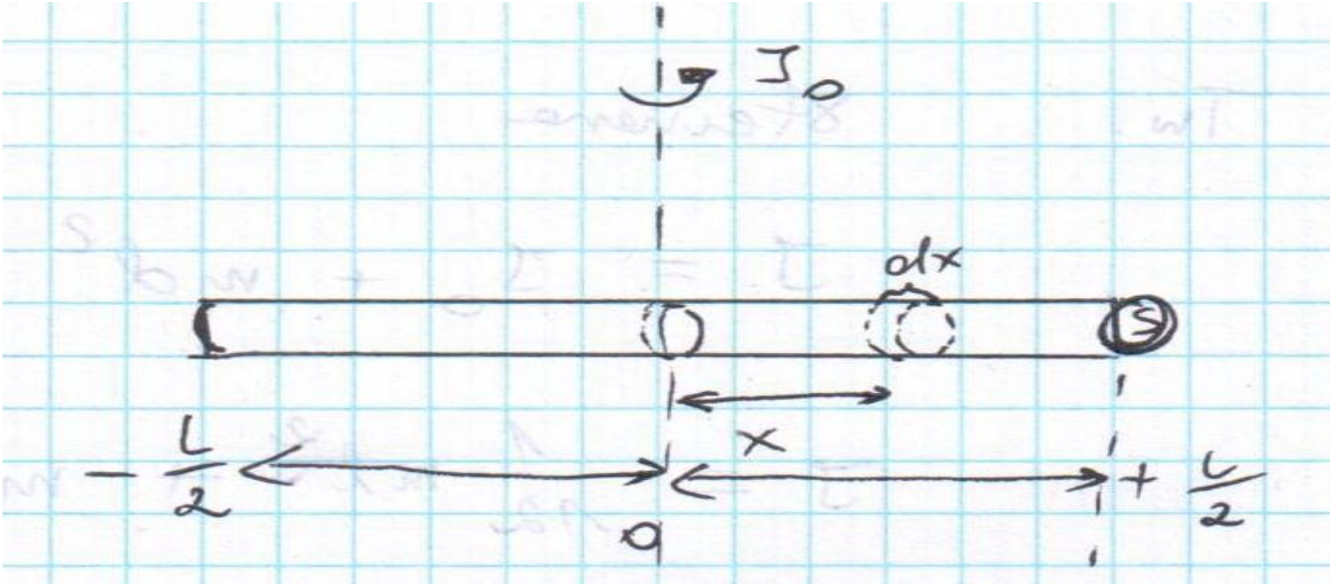
$$I = \int r^2 \mathrm{d}m$$

Element masy: $dm = ?$

$$z\ def.\ gęstoci:\ \ \rho = \frac{dm}{dV}$$

$$wobec\ tego\ dm = \rho \cdot dV,\ \ gdzie\ dV = S \cdot dx$$

Przykład 3 – rozwiązanie c.d.

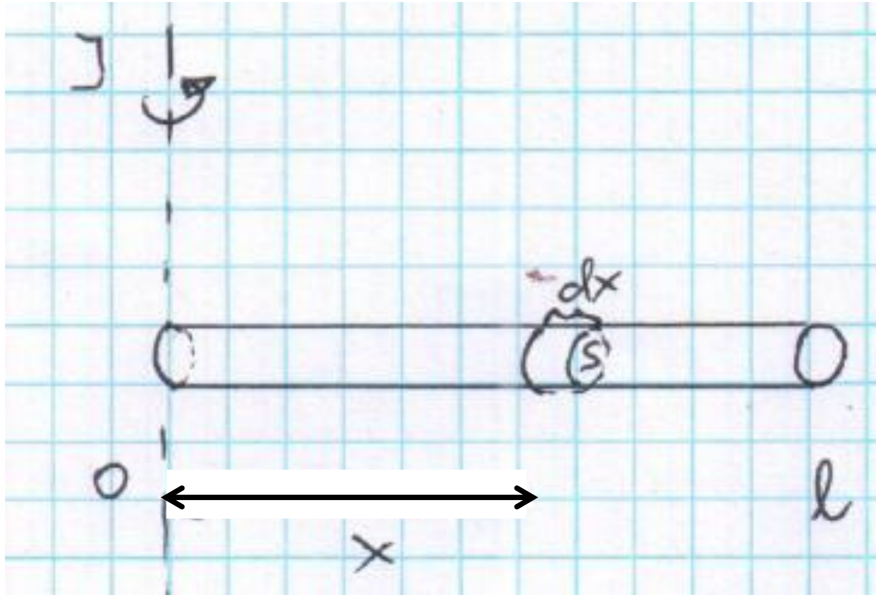


$$Zatem: \quad I_0 = \int_m x^2 dm = \int_V x^2 \cdot \rho \cdot dV = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot S \cdot dx =$$

$$= \rho S \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{3} \rho S \left(\frac{l^3}{8} - \left(-\frac{l^3}{8} \right) \right) = \frac{1}{12} \rho S l^3 = \frac{1}{12} \underbrace{\rho S l}_{m} \cdot l^2 = \frac{1}{12} m l^2$$

Przykład 3 -dynamika bryły sztywnej c.d.

Ad.b)

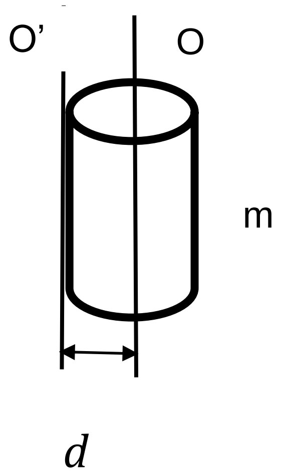


I=?

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m$$

$$J = \int_m x^2 \, dm = \int_V x^2 \rho \cdot dV = \rho \cdot S \int_0^l x^2 dx = \rho \cdot S \frac{l^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3} m l^2}$$

TWIERDZENIE STEINERA (twierdzenie o osiach równoległych)



Moment bezwładności *I* danego ciała liczony względem dowolnej osi równoległej do momentu bezwładności I_0 tego ciała związany jest zależnością :

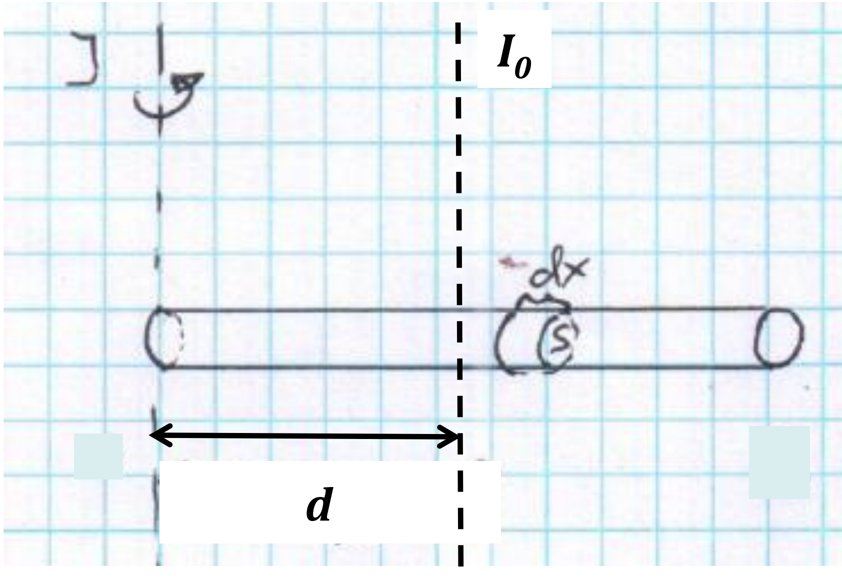
$$I = I_0 + md^2$$

gdzie:
I_0 – moment bezwładności ciała względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy;
I – moment bezwładności tego samego ciała względem osi obrotu równoległej do poprzedniej.
m – masa ciała;
d - odległość obydwu osi.

WNIOSKI: * Moment bezwładności zależy od wyboru osi obrotu.
*Gdy środek masy ciała oddala się od osi obrotu, to moment bezwładności ciała względem tej osi wzrasta.

Ad. b)

I=?

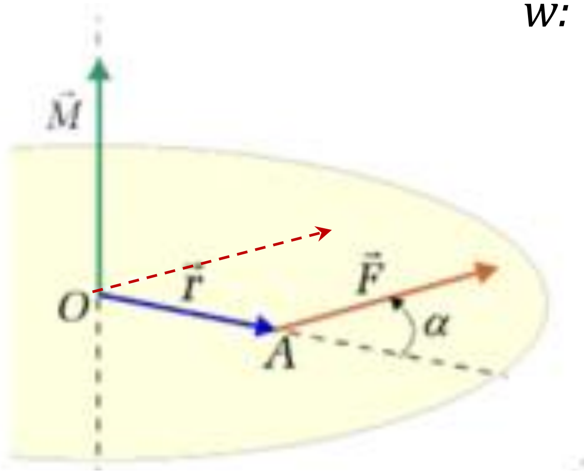


Z Twierdzenia Steinera:

$$J = J_0 + md^2 \quad ; \quad d = \frac{1}{2} l$$

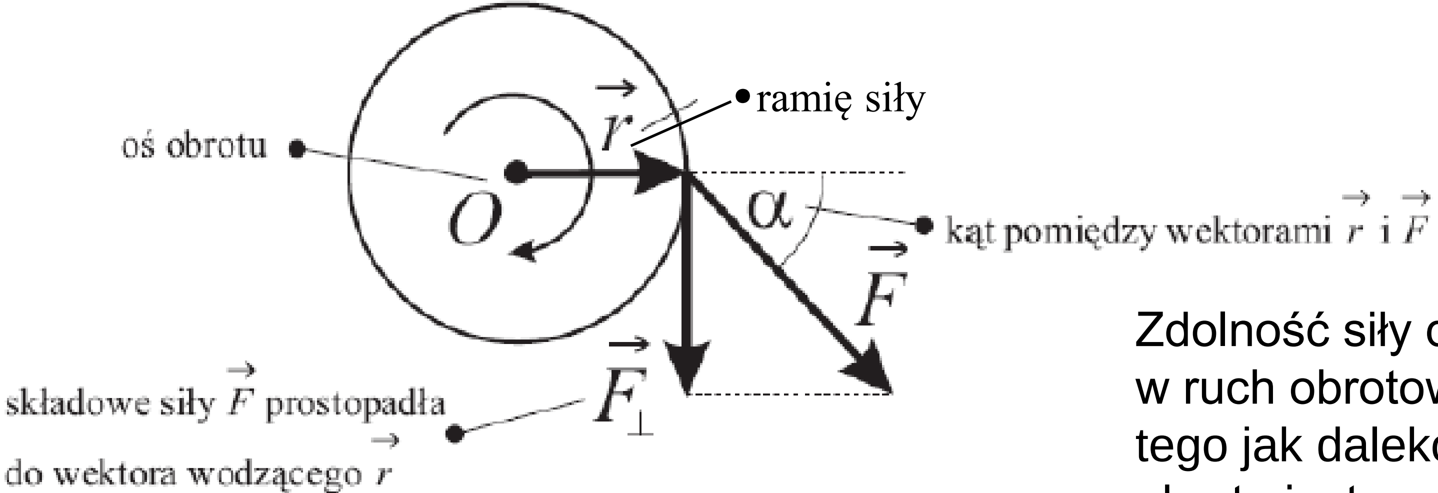
$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m\frac{1}{4}l^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} ml^2}}$$

MOMENT SIŁY $(\vec{M})$ (względem punktu 0).



w:
$$\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

s:
$$|\vec{M}| \equiv |\vec{r}||\vec{F}| \sin\alpha$$

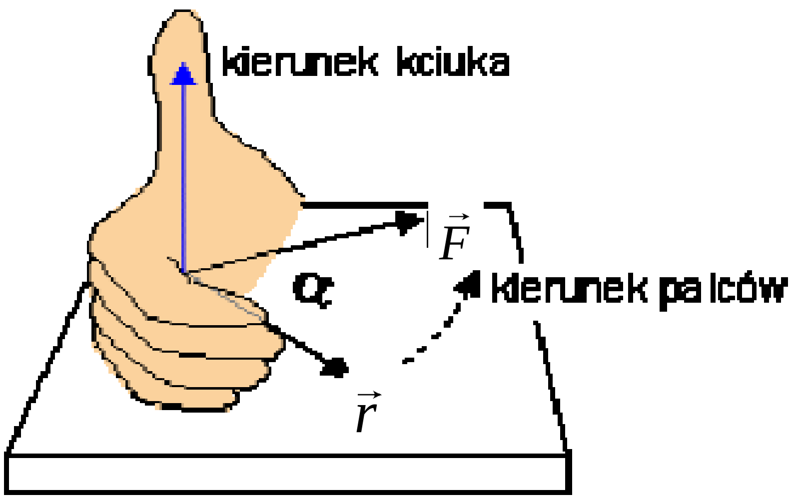


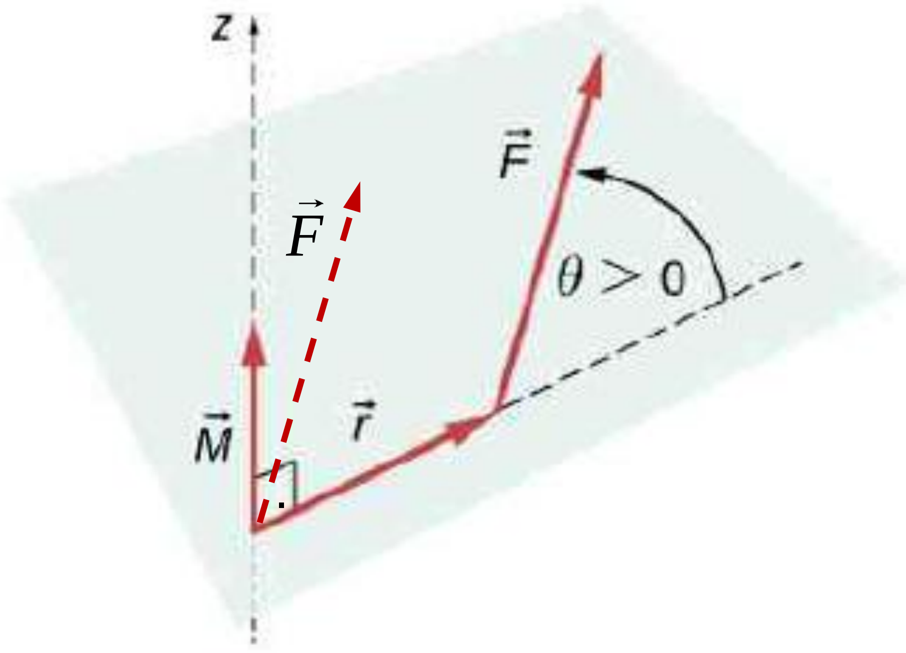
Zdolność siły do wprawiania ciała w ruch obrotowy zależy także od tego jak daleko od punktu (osi) obrotu jest ona przyłożona.

Jaki jest zwrot momentu siły: dodatni (+) czy ujemny (-) ?

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(a)

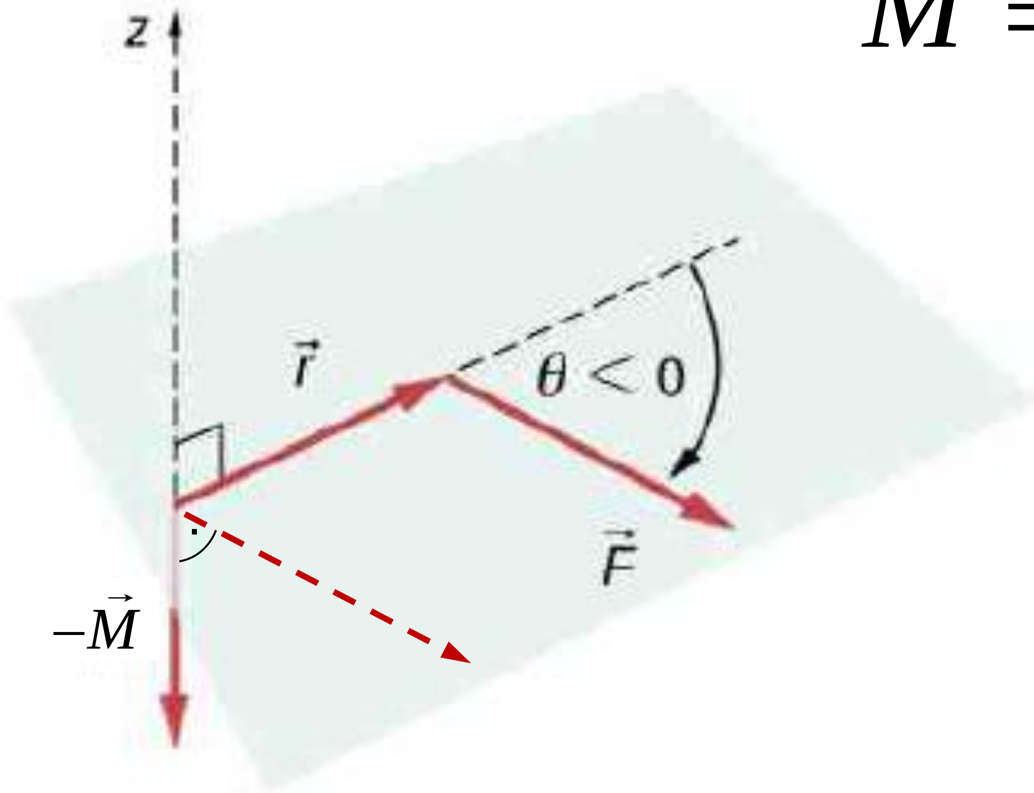




Moment siły (**$\vec{M}$**) jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{F}$, a jego kierunek jest określony regułą śruby prawoskrętnej lub regułą prawej dłoni (rys). **Obrót przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, to dodatni zwrot momentu siły *(+M)* (rys. a).**

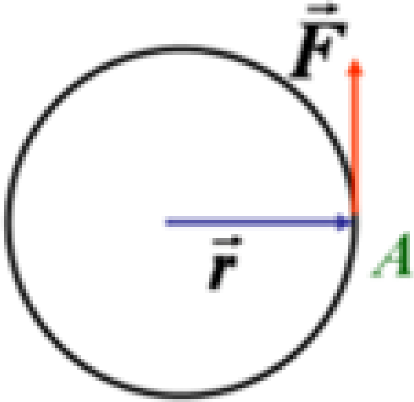
(b)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Rys. (b) **Moment siły ($-\vec{M}$) – obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara to ujemny zwrot** momentu s iły.

II ZASADA DYNAMIKI NEWTONA DLA RUCHU OBROTOWEGO



Punkt materialny A , porusza się po okręgu o promieniu $\vec{r}$ pod wpływem siły $\vec{F}$, stycznej do okręgu.

$$\text{wektorowo}: \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$I = m \cdot r^2$$

$$\text{skalarnie}: M = rF = m \cdot a \cdot r \cdot \frac{r}{r} = m \cdot r^2 \cdot \frac{a}{r} = I \cdot \varepsilon$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}}$$

Moment bezwładności liczony względem osi obrotu ciała.

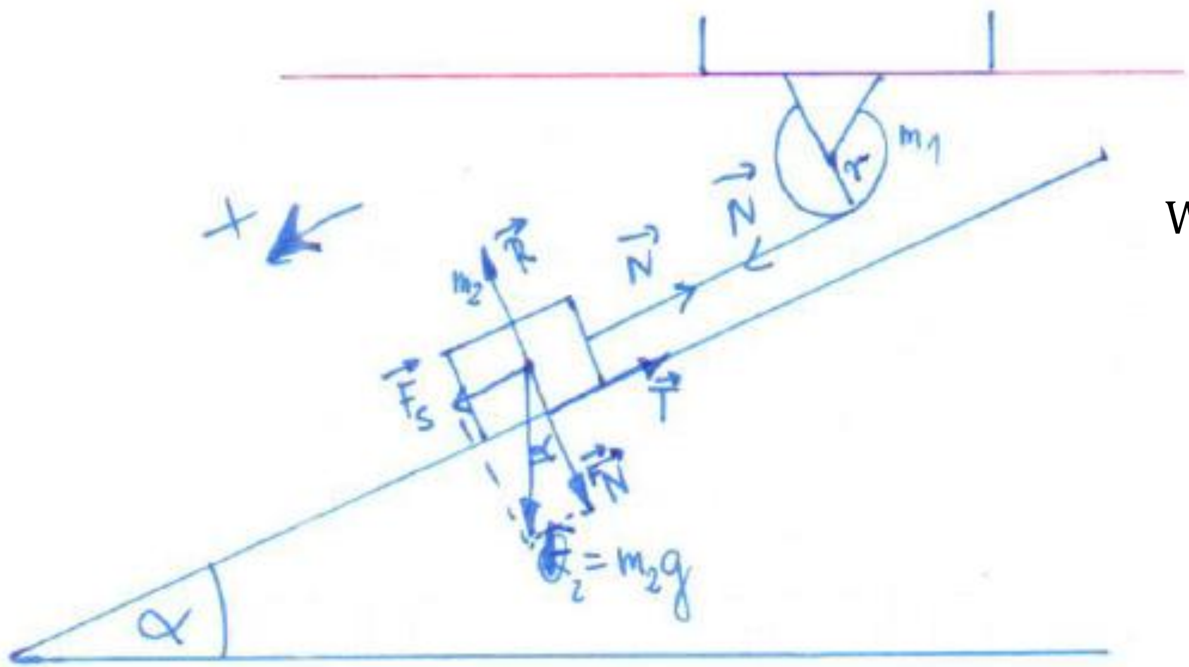
Przyspieszenie kątowe bryły sztywnej jest wprost proporcjonalne do wypadkowego momentu siły działającego na ciało, a odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności tego ciała .

Do końca cienkiej nierozciągliwej nici, nawiniętej na walcowy blok o promieniu r i masie m=200g, przyczepiono ciało o masie m_2=500g, które znajduje się na równi pochyłej o kącie nachylenia α= 45^0 (rys. tab.). Jaką drogę przebędzie ciało po równi pochyłej w ciągu czasu t=1s, jeżeli współczynnik tarcia o równię wynosi μ=0,1 ? Założyć, że ruch rozpoczyna się od stanu spoczynku.

Rozwiązanie

Dane:

r,
m_1 =200 g
m_2 = 500 g
α= 45^0
μ=0,1
v_0 =0 m/s



Szukane:

a) S=?

Wyrażenie na drogę:

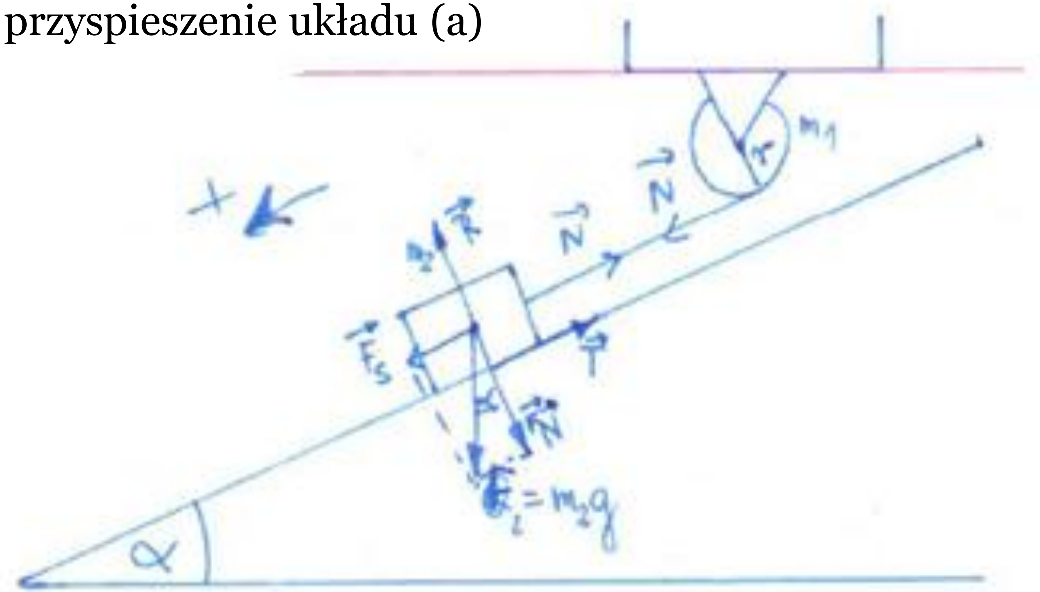
$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Jeśli v_0 =0 m/s , to:

(1) $$\boxed{S = \frac{at^2}{2}}$$

$$S = \frac{at^2}{2} = ? \quad oraz \quad a = ?$$

Wyznaczamy przyspieszenie układu (a)



2 zas. $\frac{F_s}{m_2 g} = \sin\alpha$

$$\frac{F_N}{m_2 g} = \cos\alpha$$

$$T = f \cdot F_N$$

Równania ruchu :

$$(2) \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{W2}}{m_2}$$

$$(3) \quad \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

Związek między przyspieszeniami: $\varepsilon = \frac{a}{r}$

Moment bezwładności krążka : $I = \frac{1}{2} m_1 r^2$

Przykład 4- c.d.

$$w: \quad \vec{F}_{w2} = \vec{F}_s + \vec{T} + \vec{N}$$

$$s: \quad F_{w2} = F_s - T - N$$

$$F_{w2} = m_2 g \sin\alpha - f \cdot m_2 g \cos\alpha - N$$

$$M = r \cdot N$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_2 g \sin\alpha - f m_2 g \cos\alpha - N}{m_2} \\ \dfrac{a}{r} = \dfrac{r \cdot N}{\frac{1}{2} m_1 r^2} \quad \Big| \cdot r \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{N}{\frac{1}{2} m_1} \quad \Rightarrow \quad \underline{N = \frac{1}{2} m_1 a} \end{cases}$$

Przykład 4- rozwiązanie

$$a m_2 = m_2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{1}{2} m_1 a$$

$$a\left(m_2 + \frac{1}{2} m_1\right) = m_2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$\underline{a = \frac{m_2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\left(m_2 + \frac{1}{2} m_1\right)}\left[\frac{m}{s^2}\right]} \quad , \quad a = \frac{15}{4}\sqrt{2}\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad , \quad v_0 = 0$$

$$S = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \underline{\underline{S \simeq 2\sqrt{2}\,[m]}}$$

WARUNKI RÓWNOWAGI STATYCZNEJ

1. Warunek równowagi sił

wypadkowa wszystkich sił działających na ciało jest równa zeru:

wektorowo:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0}$$

skalarnie :
(dla składowych siły wypadkowej)

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad \sum_i F_{iy} = 0, \qquad \sum_i F_{iz} = 0.$$

2. Warunek równowagi momentów sił - wypadkowa wszystkich momentów sił względem dowolnie wybranej osi jest równa zeru:

wektorowo:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0}$$

skalarnie :

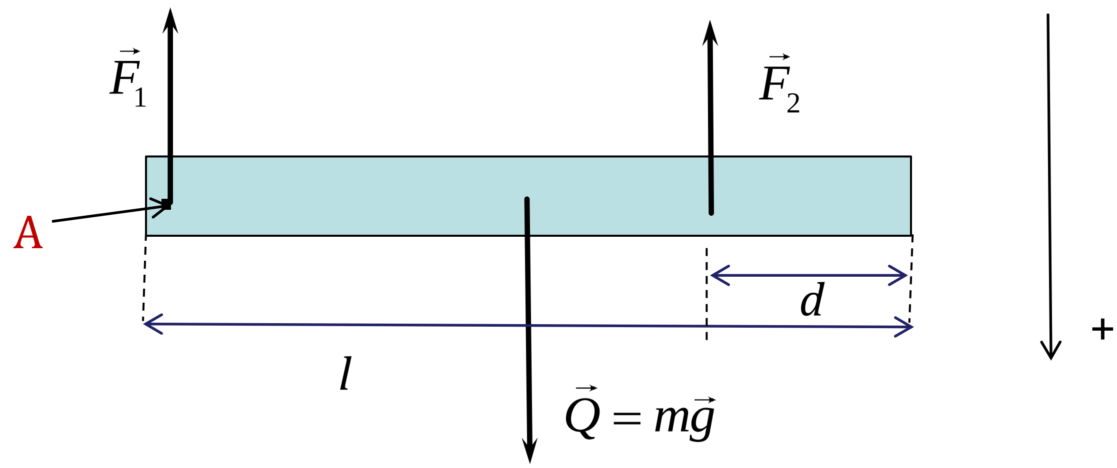
$$\sum_i M_{ix} = 0, \qquad \sum_i M_{iy} = 0, \qquad \sum_i M_{iz} = 0.$$

Przykład 1 - statyka belki

Dwóch ludzi dźwiga belkę o ciężarze *Q*. Jeden z nich trzyma belkę w jej jednym końcu, drugi zaś podtrzymuje ją w odległości *d* od drugiego końca. Obliczyć jakimi siłami na belkę musi działać każdy z robotników, jeżeli belka jest jednorodna, a jej długość wynosi *l*.

Dane: *Q, d, l,*

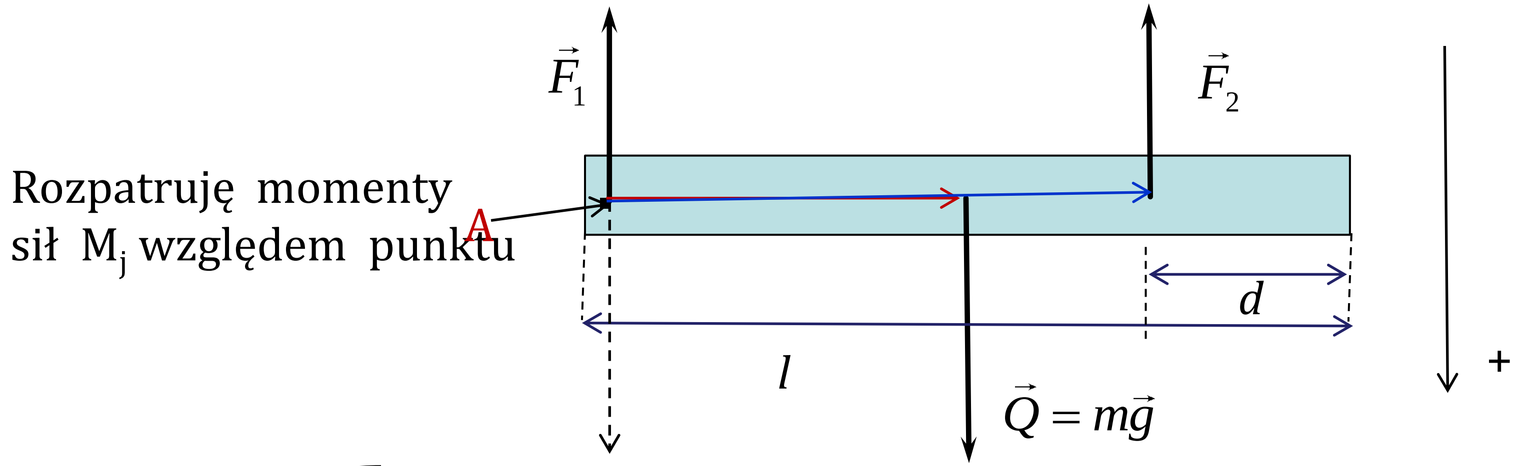
Szukane: F_1, F_2=?



Układ będzie w równowadze:

$$\begin{cases} (1) & \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ (2) & \sum_j M_{j(A)} = 0 \end{cases}$$

Rozpatruję momenty sił M_j względem punktu A .



Skalarnie:
$$
\begin{cases}
(3) \quad -F_1 + mg - F_2 = 0 \\
(4) \quad -\frac{1}{2} l \cdot Q + (l - d) \cdot F_2 = 0 \Rightarrow
\end{cases}
$$

$$\underline{F_2 = \frac{\frac{1}{2} l \cdot mg}{(l-d)}} = \frac{mgl}{2(l-d)}$$

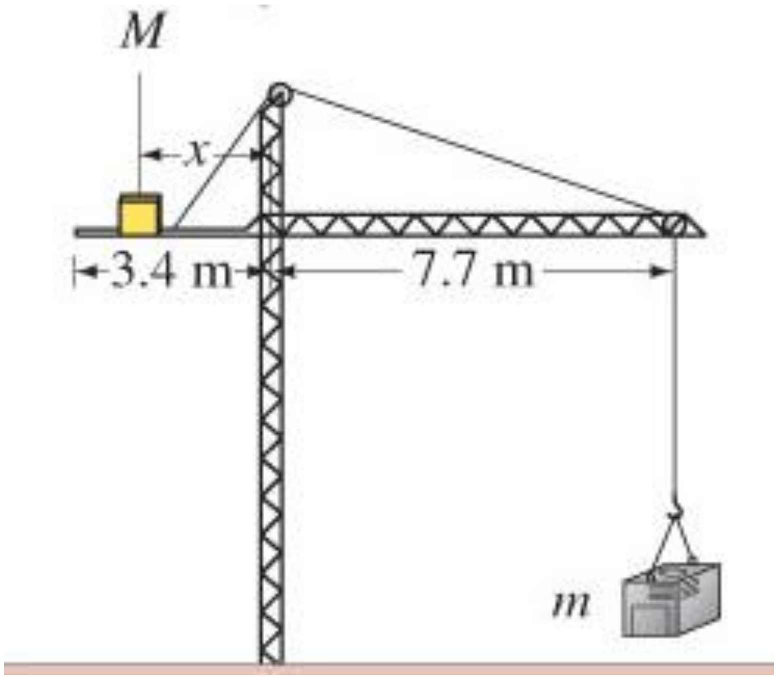
Podstawiając F_2 do równania (3):

$$-F_1 + mg - \frac{\frac{1}{2} l mg}{(l-d)} = 0$$

$$F_1 = mg - \frac{\frac{1}{2} l mg}{(l-d)}$$

$$F_1 = mg\left(1 - \frac{\frac{1}{2} l}{(l-d)}\right) = mg\left(\frac{l - d - \frac{1}{2} l}{l-d}\right) = \underline{mg\frac{\left(\frac{1}{2} l - d\right)}{(l-d)}}$$

Żuraw wieżowy (rys.) musi być zawsze starannie wyważony, tak że nie ma żadnego momentu obrotowego. Żuraw na placu budowy ma podnieść klimatyzator $m = 3300$ kg. Wymiary żurawia są pokazane na rysunku 2. Przeciwwaga żurawia ma masę $M = 10000$ kg. Zignoruj masę belki.



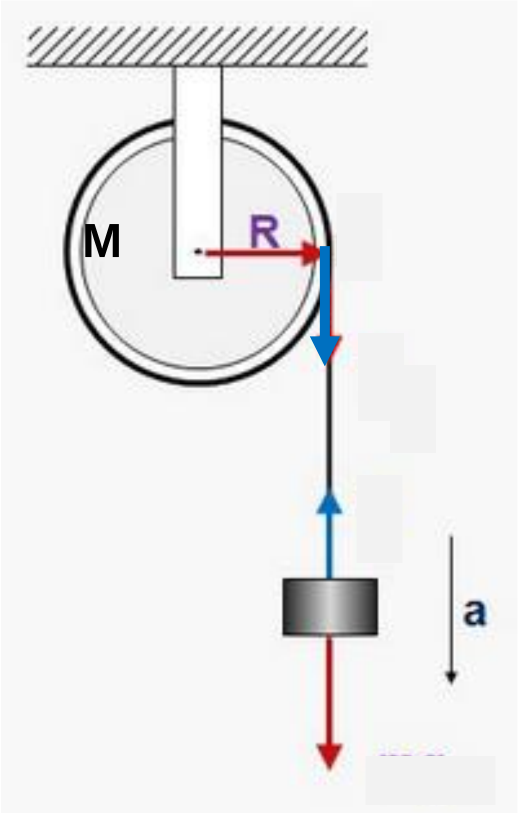
Rys. źródło: http://www.chegg.com

Gdzie należy umieścić przeciwwagę żurawia, gdy ładunek jest podnoszony z ziemi?

(Przeciwwaga jest zazwyczaj przenoszona automatycznie przez czujniki i silniki, aby precyzyjnie kompensować obciążenie).

Przykład 5 – (proszę rozwiązać samodzielnie)

Dla danych: M, R i m, znajdź przyspieszenie układu przedstawionego na rysunku. Pomiń opór powietrza oraz tarcie na osi krążka.



$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_w}{m} \\ \vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{M}_w}{I} \end{cases}$$

Odp.: $a = g\dfrac{2m}{M + 2m}$

Dziękuję za uwagę !

Przykład 4-ruch obrotowy zmienny

Częstotliwość wirnika silnika elektrycznego wynosi 1410 obr/min. Po wyłączeniu dopływu prądu wirnik poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym przez 15 s. Obliczyć ile wykonał obrotów .

Rozwiązanie

Dane:
f= 1410 1/min=23,5 1/s
t=15s

Szukane:
a) n=?

Częstotliwość – nazywana jest wśród inżynierów tzw. „prędkość obrotowa”.