FIZYKA

- Wykładowca: **dr Danuta Piwowarska**

- Kierunki : **BUDOWNICTWO**

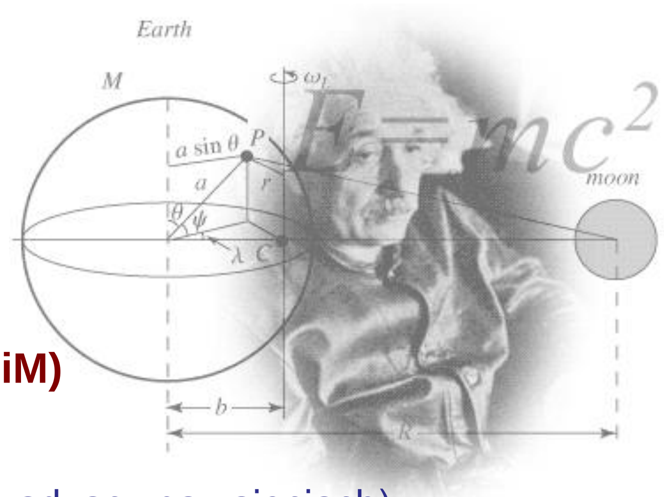
  BUDOWNICTWO INŻYNIER EUROPEJSKI

  Forma zaliczenia: Kolokwium zaliczeniowe z wykładów

- Kierunki : **INŻYNIERIA ŚRODOWISKA**

  INŻYNIERIA TRANSPORTU

  Forma zaliczenia: Egzamin



- **Materiały z wykładów: http://dana.zut.edu.pl**

- **Konsultacje:**

  środa, godz. 12.00-13.00

  czwartek, godz. 9.00-10.00; pok. 8 (KFT, WIMiM)

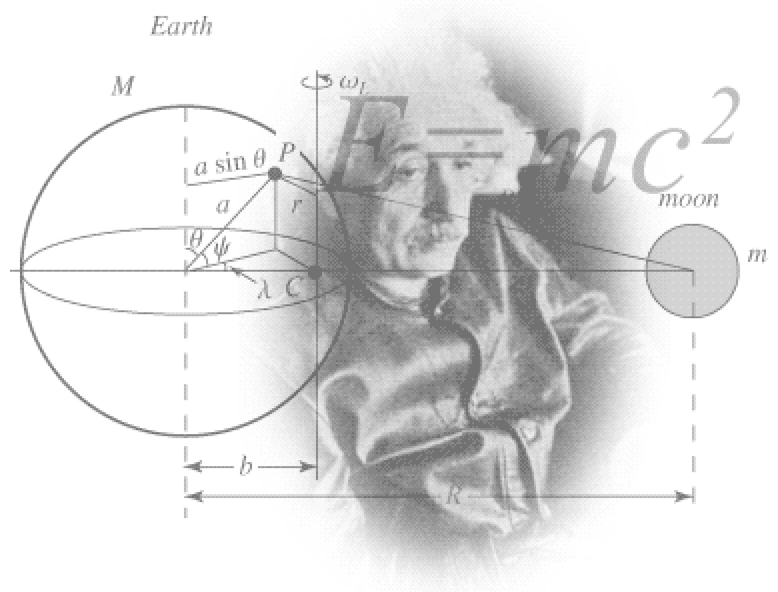
- **WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU:**

• zaliczenie na ocenę pozytywną laboratorium (warunki podaje prowadzący na zajęciach);

• zaliczenie na ocenę pozytywną **egzaminu/ kolokwium zaliczeniowego** z wykładów z Fizyki.

FIZYKA - GŁÓWNE CZĘŚCI

- **Część I** **MECHANIKA**
- **Część II** **DRGANIA I FALE**
- **Część III** **ELEKTRYCZNOŚĆ I MAGNETYZM**
- **Część IV** **ELEMENTY SZCZEGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI**



Literatura podstawowa:

1. D. Halliday, R. Resnick, J.Walker: **Podstawy Fizyki, T. 1- 4,** Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
2. S.J. Ling, J. Sanny, W. Moebs: **Fizyka dla szkół wyższych, T.1-3,** Katalyst Education 2018; OpenStax jest dostępny za darmo pod http://cnx.org/content/col23946/1.1
3. J. Masalski, M. Masalska, **Fizyka dla inżynierów, cz. I i II,** Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.
4. I.W. Sawieliew, **Wykłady z Fizyki T. 1 i 2** , Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
5. K. Jezierski, B. Kołodka, K. Sierański, **Zadania z rozwiązaniami,** Oficyna Wydawnicza Scripta, Wrocław 2000.

Fizyka to nauka eksperymentalna

Rys. Krzywa wieża w Pizie – eksperyment Galileusza.

- Źródłem informacji w fizyce są obserwacje i pomiary.
- Fizycy formułują prawa i zasady opisujące przebieg zjawisk i związki zachodzące pomiędzy mierzonymi wielkościami.

Przykład:

Arystoteles (384-322 pne.), twierdził, że ciało spada na ziemię tym szybciej im jest cięższe. Pogląd ten obowiązywał do XVI w.

Galileusz (1564-1642**)** -włoski astronom, fizyk i filozof, twórca podstaw nowożytnej mechaniki i astrofizyki.

Udowodnił:

CZAS OPADANIA KUL (80 KG, 200 G) JEST TAKI SAM

(Przy zaniedbaniu nieznacznego efektu wynikającego z tarcia powietrza).

WNIOSEK:

W nauce wyniki eksperymentu są zawsze ważniejsze niż autorytet nawet najbardziej poważanego człowieka.

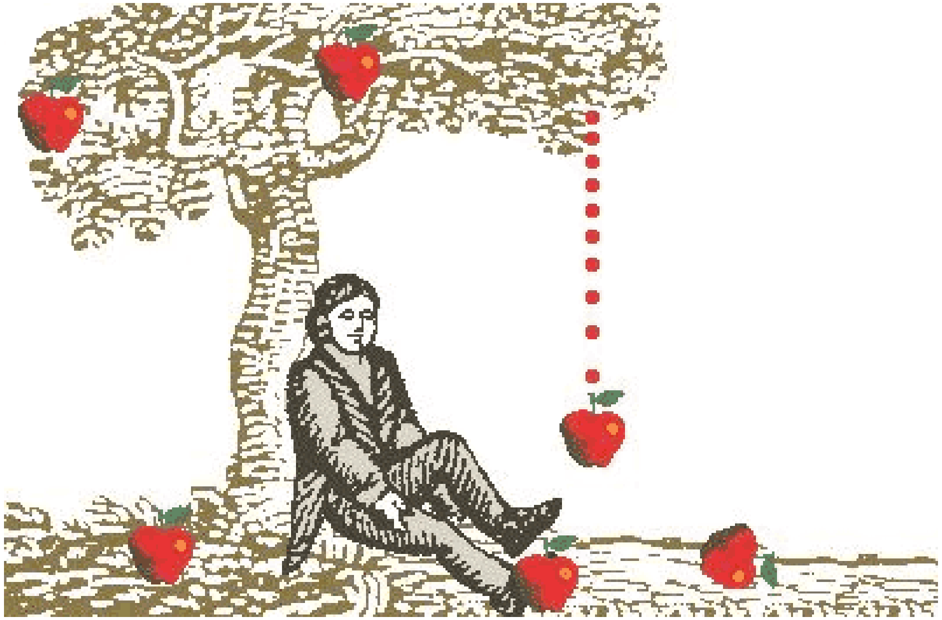
- **Prawom ruchu drogowego podlegają wszyscy kierowcy.**

Bywa jednak, że któryś z kierowców praw tych nie przestrzega.

- **Prawu karnemu podlegają wszyscy przestępcy.**

Niekiedy jednak przestępcy udaje się uniknąć wymiaru sprawiedliwości.

- **Prawom fizyki podlegamy wszyscy - zarówno my sami, jak i cała przyroda.**



Praw fizyki nie da się nie przestrzegać, ani uniknąć.

FIZYKA A ZJAWISKA W PRZYRODZIE – WYJAŚNIJ DLACZEGO…

Dlaczego rower nie przewraca się kiedy jedzie, a przewraca się - kiedy stoi?

Dlaczego niebo jest niebieskie?

Dlaczego woda wrze?

Co sprawia, że samolot wznosi się?

Co jest powodem „tęczy" na płycie kompaktowej?

Czy reaktor jądrowy może wybuchnąć na podobieństwo „bomby atomowej"?

CZYM JEST FIZYKA ?

Według *Nowej encyklopedii powszechnej PWN* fizyka to nauka przyrodnicza zajmująca się badaniem ogólnych własności materii i zachodzących zjawisk, a także wykrywaniem ogólnych praw, którym te zjawiska podlegają.

Fizyka jest podstawową nauką przyrodniczą, której zadaniem jest badanie obiektywnych własności otaczającego nas świata materialnego i zachodzących w nim zjawisk, gromadzenie faktów, a przede wszystkim odnajdywanie ich wzajemnej zależności.

❑ Czym zatem jest nauka ?

Czy starożytni Egipcjanie, twórcy piramid byli naukowcami?

.

Czym zatem jest nauka …?

Kiedy można mówić o nauce?
Według Henriego **Poincarego** (1854-1912), naukę tworzy się z faktów, tak jak dom buduje się z kamieni, ale zbiór faktów nie jest nauką, tak jak stos kamieni nie jest domem. To znaczy, że należy jeszcze znaleźć powiązania (związki) między faktami.

Dzisiaj mianem nauki określa się gromadzoną przez pokolenia wiedzę o rzeczywistości, spełniającą warunki prawdziwości, czyli na przykład w naukach przyrodniczych, potwierdzoną doświadczalnie lub obserwacyjnie. **Nauka jest więc efektem zbiorowego wysiłku ludzkości**.

Tym między innymi różni się ona od sztuki.

- Gdyby Ludwig van Beethoven nie skomponował swojej V symfonii, to nie powstałaby ona nigdy.

- Gdyby Albert Einstein nie sformułował teorii względności, z pewnością uczyniłby to jakiś inny naukowiec (wzory transformacyjne opracował Lorentz; H. Poincare był bliski sformułowania STW).

Badania fizyczne

- **Metoda indukcyjna** polega na tym, że wyniki badań poszczególnych zjawisk uogólnia się stopniowo, przechodząc do sformułowania praw fizycznych. Metodę tę stosuje się głównie w fizyce doświadczalnej.

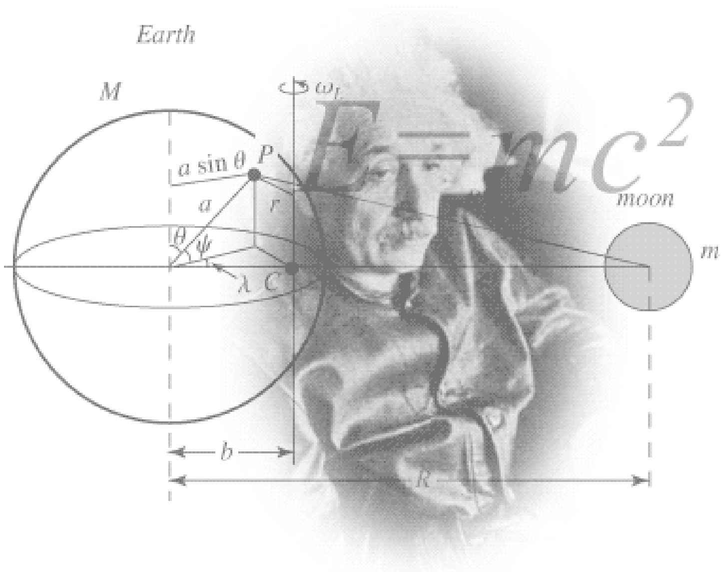
- **Metoda dedukcyjna** stosowana jest głównie w fizyce teoretycznej. Punktem wyjścia są pewne ogólne prawa i zasady. Analiza tych zasad umożliwia przewidywanie nowych zdarzeń i faktów, pozwala stworzyć nową teorię.

Żadna teoria fizyczna nie może być uznana za ostateczną, dlatego że każda z nich została potwierdzona tylko w skończonej liczbie doświadczeń.

Pierwszy sztuczny satelita Ziemi: Sputnik 1

Isaak Newton przewidywał, na podstawie znanych sobie praw fizyki, że możliwy jest ruch satelitów wokół Ziemi. Hipotezę tę potwierdzono w XX wieku, gdy w roku 1957 wystrzelono pierwszego sztucznego satelitę Ziemi (rys.).

Teoretycy przewidują możliwość istnienia nowych, nieznanych dotychczas zjawisk, wskazując eksperymentatorom kierunki badań. Eksperymentatorzy zaś dostarczają teoretykom materiału doświadczalnego do opracowania.



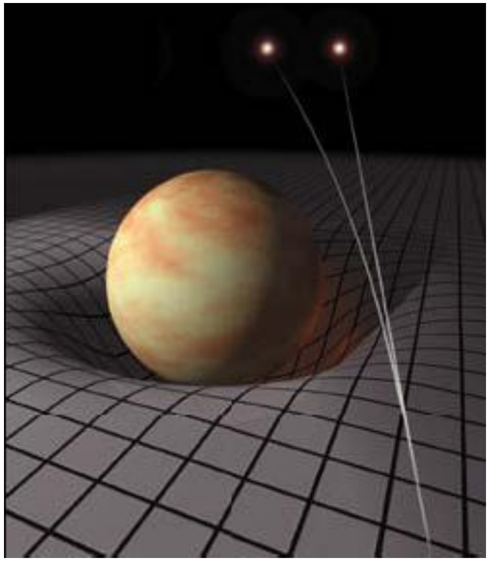
Teoria względności

Teorię względności tworzą: szczególna teoria względności, ogłoszona w 1905 roku, oraz ogólna teoria względności, ogłoszona w 1916 roku.

Szczególna teoria względności wiąże wyniki pomiarów położenia i czasu przeprowadzonych w różnych (inercjalnych) układach odniesienia.

Ogólna teoria względności to relatywistyczna teoria oddziaływań grawitacyjnych, według której grawitacyjne przyspieszenie ciał jest spowodowane zakrzywieniem czasoprzestrzeni.

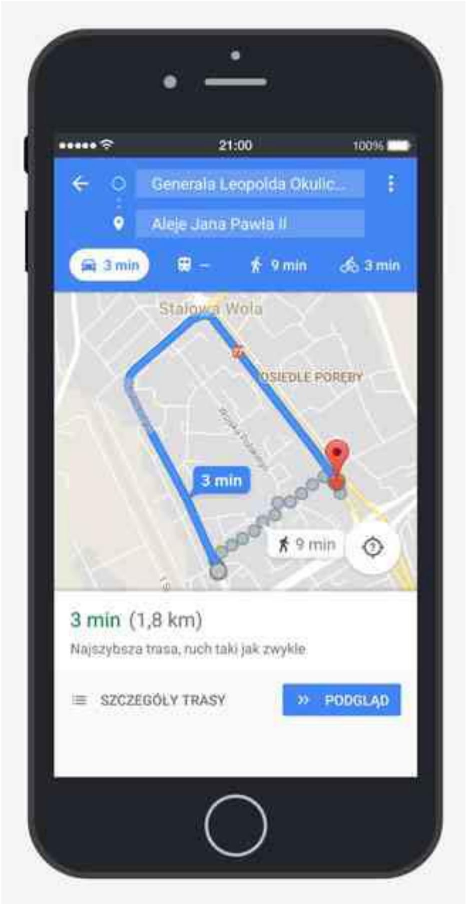
Zgodnie z ogólną teorią względności masa powoduje odkształcenie czasoprzestrzeni, a odkształcona czasoprzestrzeń wyznacza ruch poruszających się w niej mas. W konsekwencji w pobliżu masywnych obiektów przestrzeń się zakrzywia a czas płynie wolniej.



Ugięcie promieni świetlnych
w pobliżu ciała o dużej masie
zakrzywiającego czasoprzestrzeń

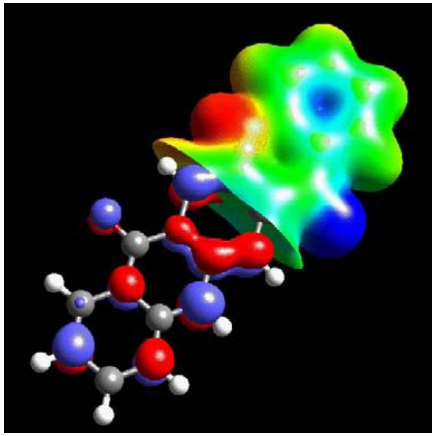
Czy teoria względności ma jakieś praktyczne zastosowanie?

Przykładowy iPhone , rodzaj smartfona z funkcją GPS.



- System GPS pozwala na określenie z dokładnością do kilku metrów położenia odbiornika na powierzchni Ziemi. Uwzględnia poprawkę relatywistyczną związaną z tym, że czas odmierzany przez zegary na satelitach jest inny niż czas odmierzany na Ziemi.

- Aplikacja mobilna pozwala na wyznaczenie trasy podróży pomiędzy dwoma punktami w oparciu o położenie początkowe i końcowe (z systemu GPS) oraz zapisaną w aplikacji mapę terenu.

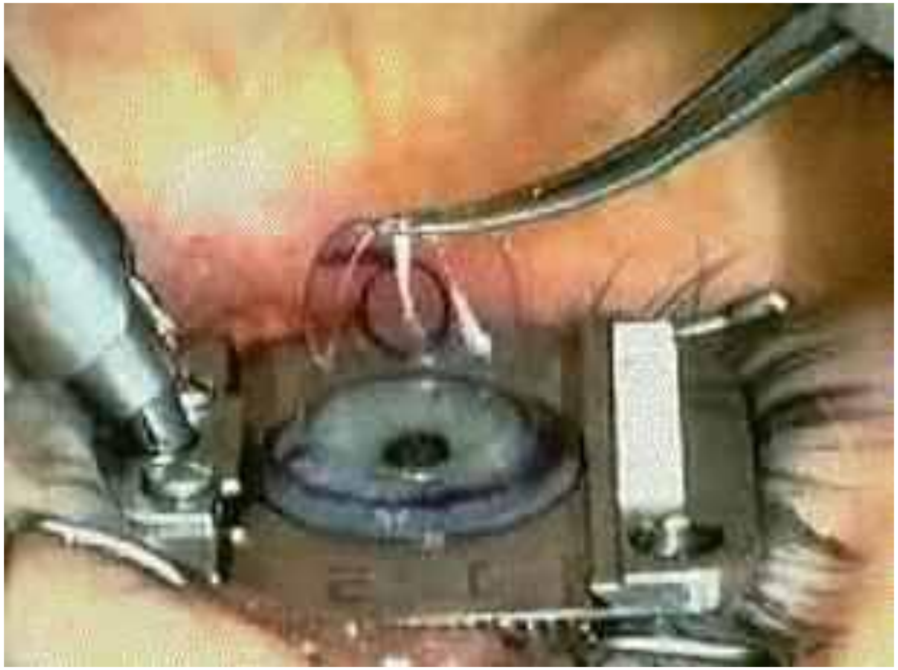


W mechanice kwantowej Cząstkę lokalizujemy z określo-nym prawdopodobieństwem

❑ Fizyka kwantowa

Laser - nazywany światłem XX wieku – został również odkryty dzięki pracom w dziedzinie fizyki kwantowej. Podstawą działania każdego lasera jest zjawisko wymuszonej emisji promieniowania. Teoretyczne podstawy zjawiska emisji wymuszonej promieniowania Einstein sformułował w latach dwudziestych XX w.

W praktyce, w 1960 r. uruchomiono pierwszy laser - rubinowy . Niedługo potem uruchomiono lasery gazowe (np. helowo-neonowe) oraz półprzewodnikowe (bardzo ważne w telekomunikacji).



Laser ekscimerowy (UV) umożliwia usunięcie tkanki z dokładnością do 0,25 mikrometra (dla porównania - włos ludzki ma grubość około 50 mikrometrów).

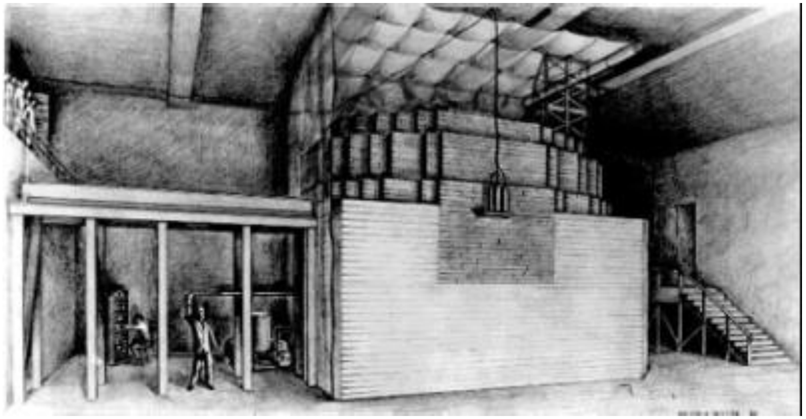
❑ Odkrycie jądra atomowego i jego własności

➢ Ernest Rutherford, odkrywa w 1911 roku jądro atomowe.

➢ Podczas reakcji rozszczepienia jąder masa produktów rozpadu jest mniejsza niż masa składników przed rozpadem. Różnica mas Δm może być wyzwolona w postaci energii o wartości:

$$E = \Delta mc^2$$

➢ 1939 roku Enrico Fermi rozpoczął konstrukcję pierwszego reaktora jądrowego.



Pierwszą kontrolowaną reakcję rozszczepienia jąder atomowych przeprowadzono w tym reaktorze 2 grudnia 1942 roku.

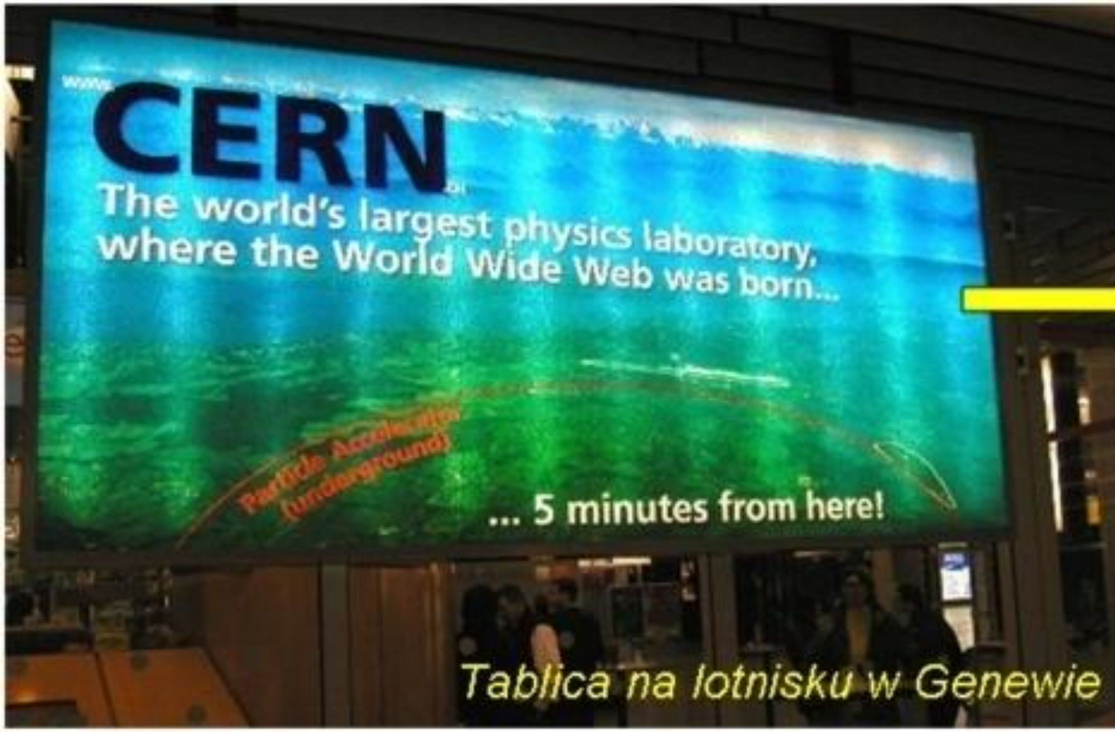
Próbny wybuch jądrowy

➢ W bombie atomowej, zachodzi niekontrolowana łańcuchowa reakcja rozszczepiania jąder uranu 235U (lub plutonu).

➢ Korzystając z energii zamkniętej w jądrze atomowym budujemy elektrownie jądrowe, w których reaktorach występują kontrolowane reakcje łańcuchowe.

➢ Technika jądrowa to również zastosowanie izotopów promieniotwórczych w technice (np. wykrywacze dymu) i medycynie (do diagnostyki i terapii; rezonans magnetyczny, tomograf komputerowy).

CERN - *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire*, czyli Europejski Ośrodek Badań Jądrowych



CERN
największe w świecie laboratorium fizyki, gdzie narodził się World Wide Web … 5 minut stąd!

ROZWÓJ FIZYKI:

- ustawiczne poszukiwania niekonwencjonalnych rozwiązań,
- pokonywanie wciąż nowych barier technologicznych: w elektronice, informatyce, mechanice, technice wysokiej próżni, niskich temperatur, wysokich ciśnień itd...

SPÓJNA METROLOGICZNA CAŁOŚĆ

Wielkość fizyczna	Jednostki miary		
	Oznaczenie	Nazwa	Skrót
Długość	L	**metr**	**m**
Masa	M	**kilogram**	**kg**
Czas	t	**sekunda**	**s**
Natężenie prądu elektrycznego	I	**amper**	**A**
Temperatura termodynamiczna	T	**kelwin**	**K**
Światłość (natężenie światła)	I_v	**kandela**	**cd**
Ilość (liczność) materii	N	**mol**	**mol**
Kąt płaski	(α, β, γ)	**radian**	**rad**
Kąt bryłowy	(Ω, ω)	**steradian**	**sr**

Tab. **Podstawowe i uzupełniające jednostki Międzynarodowego Układu Jednostek Miar (SI)**

Wejście w życie nowych definicji jednostek SI - 20 maja 2019r.

Rys. Źródło: https://www.gum.gov.pl/pl/redefinicja-si/redefinicja-si/2334,Redefinicja-SI.html
SI redefinition – link do filmu :https://www.gum.gov.pl/en/redefinicja-si/si-redefinition/257,SI-redefinition.html

STAŁE PODSTAWOWE

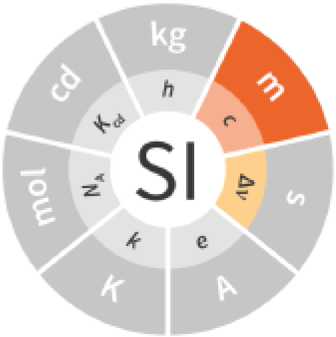
$\Delta\nu_{Cs}$	**Częstotliwość cezowa $\Delta\nu_{Cs}$,** częstotliwość nadsubtelnego przejścia w atomach cezu (^{133}Cs) w niezaburzonym stanie podstawowym	9 192 631 770 s^{-1}
c	**prędkość światła w próżni**	299 792 458 m s^{-1}
h	**stała Plancka**	6,626 070 15$\times 10^{-34}$ J s (J s = kg m^2 s^{-1})
e	**ładunek elementarny**	1,602 176 634$\times 10^{-19}$ C (C = A s)
k	**stała Boltzmanna**	1,380 649$\times 10^{-23}$J K^{-1} (J K^{-1} = kg m^2 s^{-2} K^{-1})
$\mathbf{N}_A$	**stała Avogadra**	6,022 140 76$\times 10^{23}$ mol^{-1}
$\mathbf{K}_{\mathbf{cd}}$	**wartość skuteczności świetlnej** monochromatycznego promieniowania o częstotliwości 540$\times 10^{12}$ Hz	683 lm W^{-1}

SPÓJNA METROLOGICZNA CAŁOŚĆ

Jednostka miary		Odniesienie	
Nazwa	**Symbol**	**Nazwa**	**Symbol**
sekunda	s	częstotliwość cezowa	$\Delta\nu_{Cs}$
metr	m	prędkość światła	c
kilogram	kg	stała Plancka	h
amper	A	ładunek elementarny	e
kelwin	K	stała Boltzmanna	k
mol	mol	stała Avogadra	N_A
kandela	cd	skuteczność świetlna	K_{cd}

Tabela 2. Stałe fizyczne : c, h, e, k i N_A oraz stałe techniczne $\Delta\nu_{Cs}$ i K_{cd} pełnią rolę odniesień przy definiowaniu jednostek miar w każdej jednostce podstawowej SI ; z wyjątkiem mola.

Źródło: https://www.gum.gov.pl/pl/redefinicja-si/redefinicja-si/



❑ JEDNOSTKA DŁUGOŚCI – METR

Stara definicja:

Długość drogi, przebytej w próżni przez światło w czasie równym 1/299792458 s.

Nowa definicja – od maja 2019

Jest zdefiniowana poprzez przyjęcie ustalonej wartości liczbowej prędkości światła w próżni c = 299 792 458 m/s, przy czym sekunda zdefiniowana jest za pomocą częstotliwości cezowej $\Delta\nu_{Cs}$. Metr w odniesieniu do prędkości światła i częstotliwości cezowej wyraża się w następujący sposób:

$$1m = \left(\frac{c}{299792458}\right)s = \frac{9192631770}{299792458}\frac{c}{\Delta\nu_{Cs}} \approx 30{,}663319\frac{c}{\Delta\nu_{Cs}}$$

Rys. źródło: https://www.gum.gov.pl

Stara definicja – do 20.05.2019:

Sekunda – czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania powstającego podczas zmiany stanu energetycznego- przy przejściu między dwoma nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu ^{133}Cs – tzw. zegar atomowy

Rysunek . Tzw. fontanna atomowa widoczna na zdjęciu ma długość prawie 9 m. Dzięki zliczaniu drgań atomu cezu zegar atomowy odmierza czas z dokładnością wyższą niż jedna mikrosekunda na rok (Źrodło: Steve Jurvetson)

Tabela 1.4. Wybrane przedziały czasu (w przybliżeniu)

Wielkość	Czas [s]
czas życia protonu (przewidywany)	$1 \cdot 10^{39}$
wiek Wszechświata	$5 \cdot 10^{17}$
wiek piramidy Cheopsa	$1 \cdot 10^{11}$
średni czas życia ludzkiego	$2 \cdot 10^{9}$
doba	$9 \cdot 10^{4}$
czas między kolejnymi uderzeniami ludzkiego serca	$8 \cdot 10^{-1}$

Nowa definicja - od 20.05.2019:

- **JEDNOSTKA CZASU – SEKUNDA [s]**

Sekunda – zdefiniowana poprzez przyjęcie ustalonej wartości liczbowej częstotliwości cezowej $\Delta\nu_{Cs}$, to jest częstotliwości nadsubtelnego przejścia w atomach cezu ^{133}Cs w niezaburzonym stanie podstawowym, wynoszącej 9 192 631 770 , wyrażonej w jednostce Hz, która jest równa s^{-1}.

Sekundę, w odniesieniu do częstotliwości cezowej, wyraża się w następujący sposób:

$$1s = \frac{9192631770}{\Delta\nu_{Cs}}$$

Zegary cezowe (w teorii) mogą pomylić się o 1s na ok. 30 mld lat.

Źródło: https://www.gum.gov.pl

Obowiązujące dotąd definicje: metra i sekundy pozostają niezmienione.

❑ JEDNOSTKA MASY – KILOGRAM [kg]

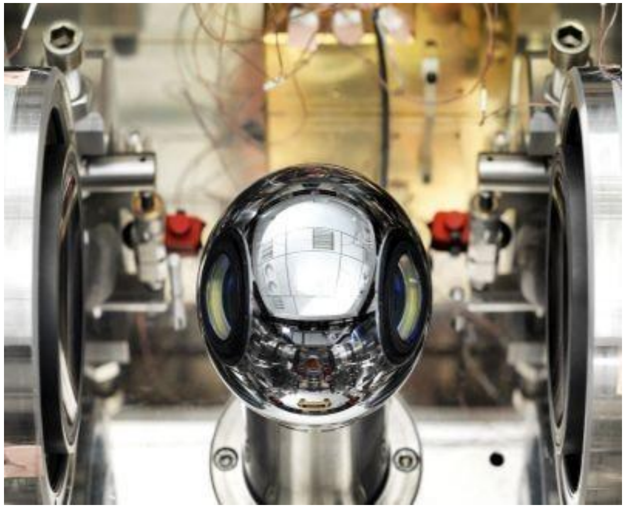
Stara definicja:

Masa wzorca wykonanego ze stopu platyny i irydu jest/była ostatnim wzorcem materialnym

Rys. Przykładowa replika byłego wzorca znajduje się w Narodowym Instytucie Standaryzacji i Technologii (NIST).

*1 kg w przybliżeniu jest to masa jednego litra czystej wody w temperaturze 4°C

❑ JEDNOSTKA MASY – KILOGRAM [kg]- nowa definicja - od 20.05.2019



Kilogram – zdefiniowany poprzez stałą Plancka

$$h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34} \; \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

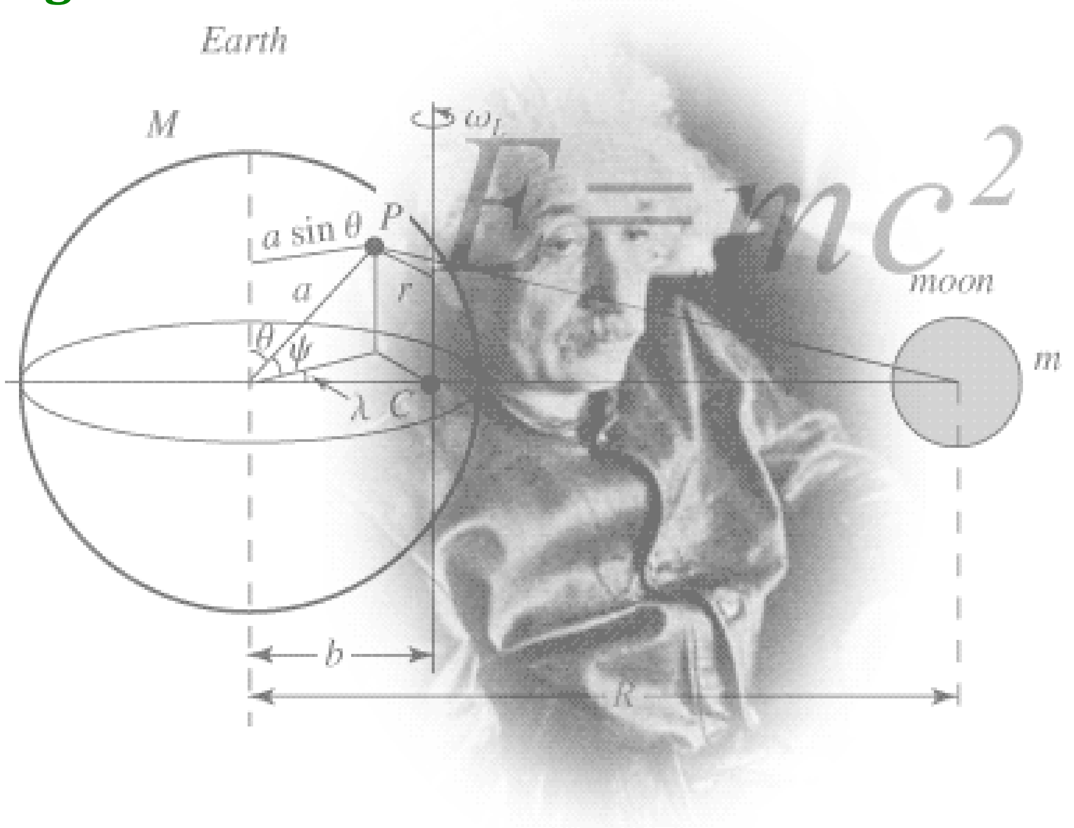
Ponieważ stała Plancka wyrażona jest w jednostce **kg m² s⁻¹**, to do określenia **kg** należy zastosować częstotliwość cezową $\Delta\nu_{Cs}$
oraz prędkość światła ***c*** *(efekty kwantowe)*.

Kilogram w odniesieniu do ww. stałych wyraża się w następujący sposób:

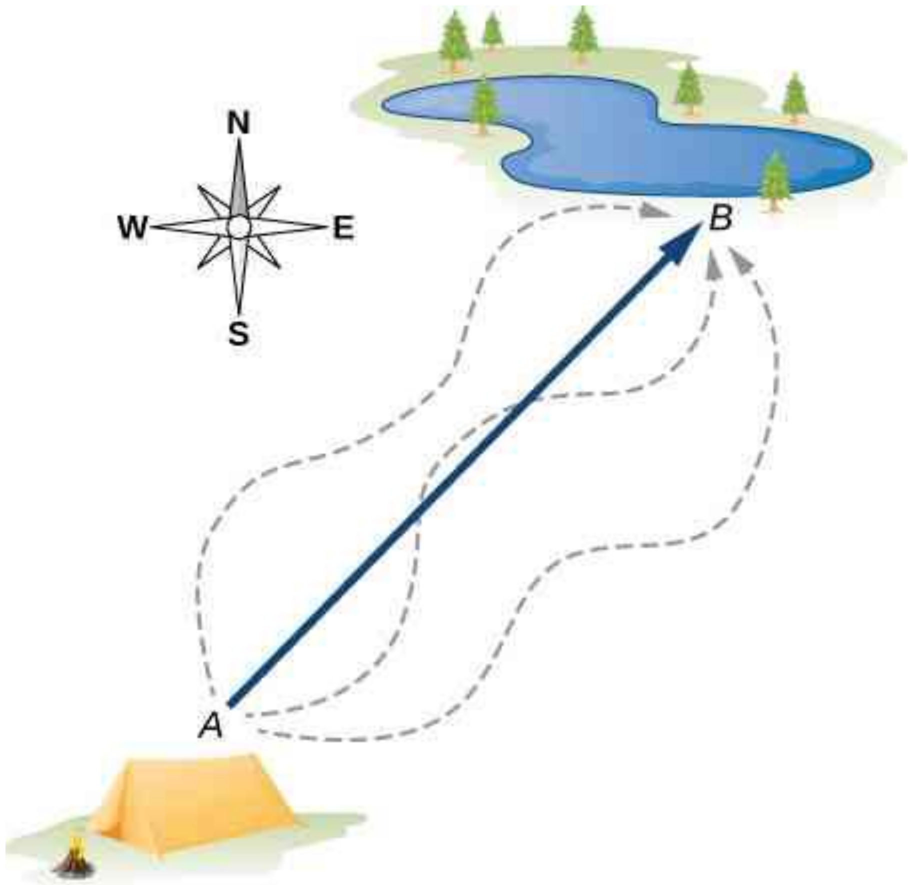
$$1kg = \frac{(299792458)^2}{(6{,}62607015 \cdot 10^{-34})(9192631770)} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2} \approx\sim 1{,}4755214 \cdot 10^{40} \frac{h\Delta\nu_{Cs}}{c^2}$$

źródło: https://www.gum.gov.pl

- **Iloczyn skalarny; iloczyn wektorowy**
- **Funkcje**
- **Elementy rachunku różniczkowego**
- **Elementy rachunku całkowego**

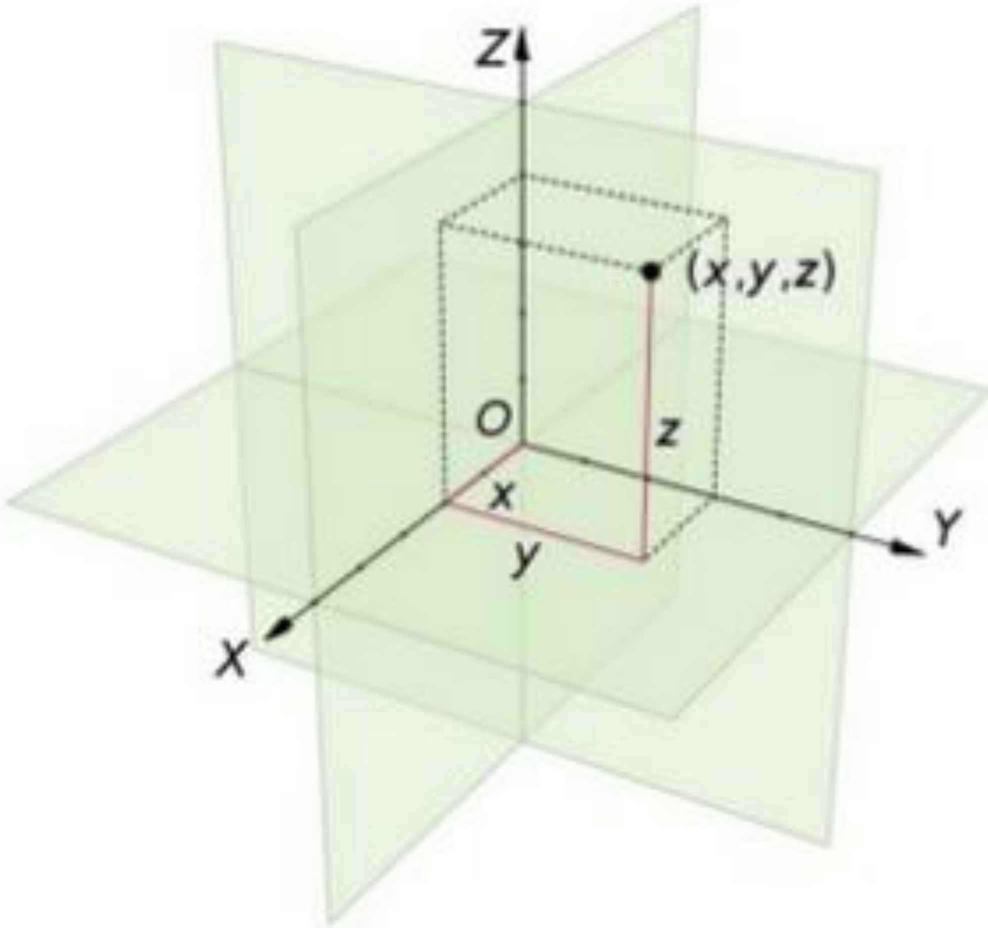


Sposobem określenia miejsca gdzie znajduje się obiekt jest układ współrzędnych.



Rys. Wektor przemieszczenia
(rys. źr. Fizyka dla szkół wyższych S. Ling, J.Sanny, W. Moebs)

KARTEZJAŃSKI UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

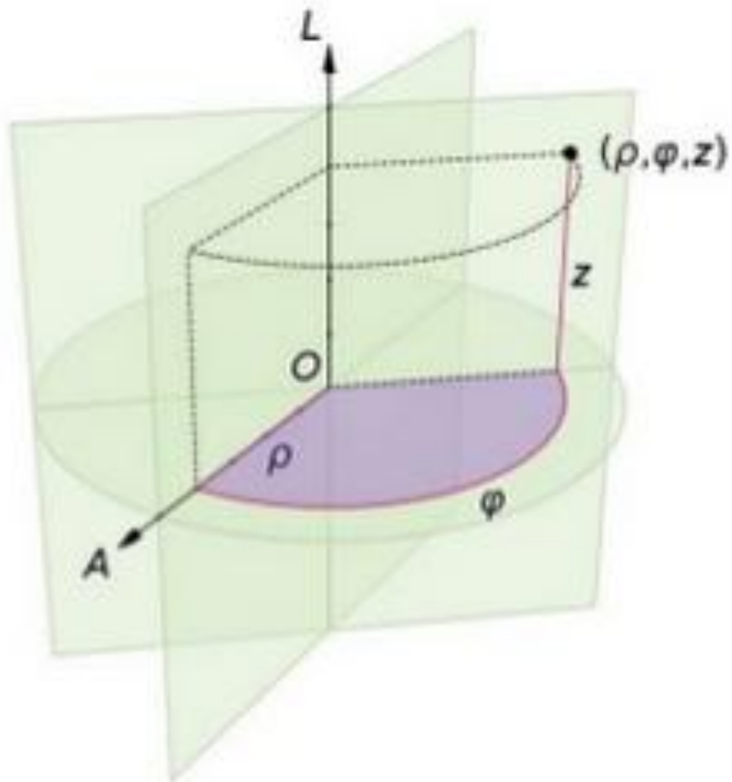


Rys. Kartezjański przestrzenny układ odniesienia.

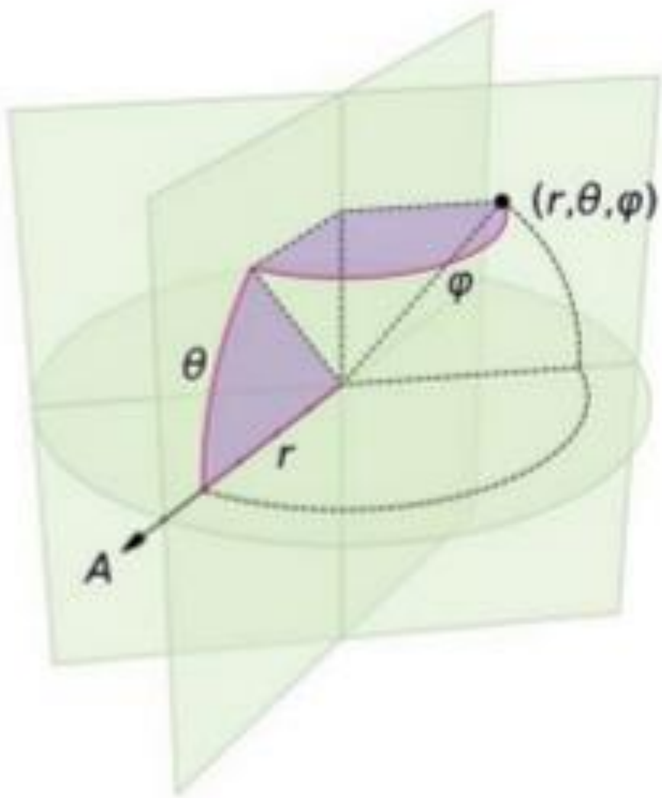
(rys. źródło: https://www.slideshare.net/ssusere91f32/coordinate-systems-lecture-3)

Jego uogólnieniem jest układ trzech wzajemnie prostopadłych osi: OX, OY, OZ przecinających się w punkcie O=(0,0,0).

Oprócz układu kartezjańskiego stosuje się inne układy odniesienia (w zależności od sposobu ustawienia układu współrzędnych) :

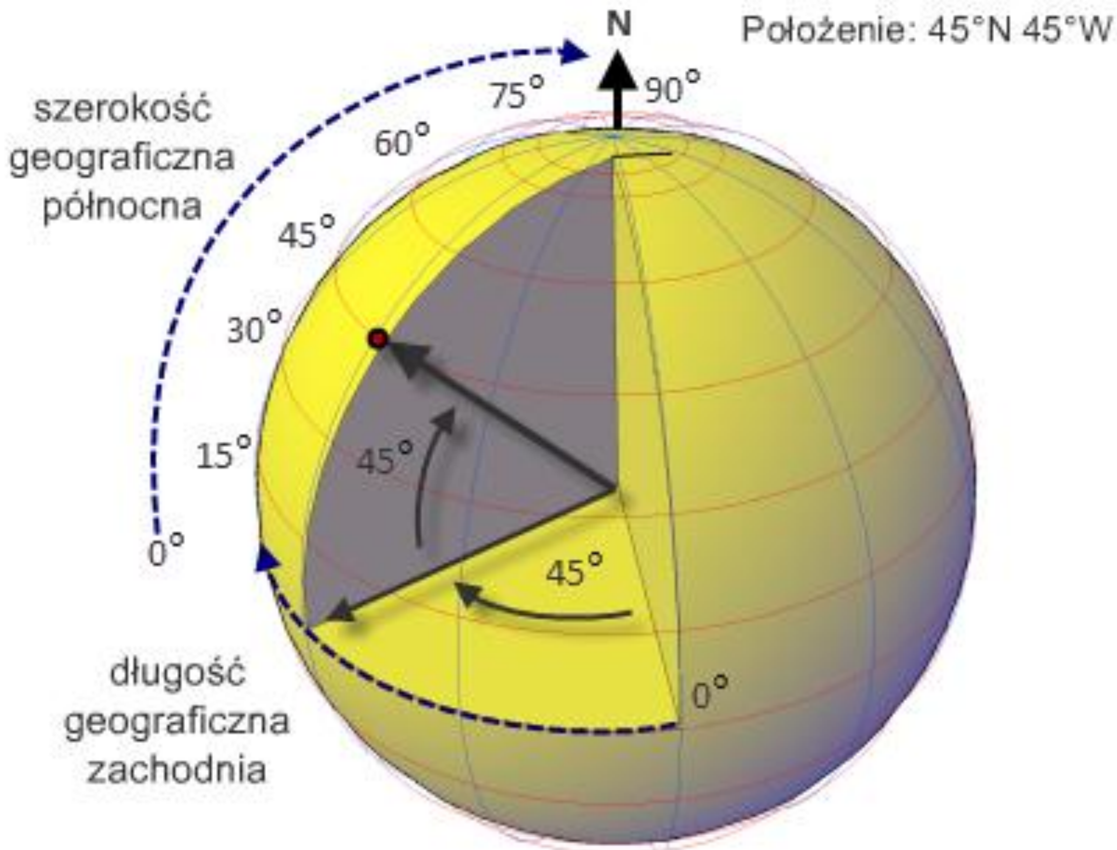


Rys. a) Układ cylindryczny.



Rys. b) Układ sferyczny.

(Rysunki a)i b). źródło: https://www.slideshare.net/ssusere91f32/coordinate-systems-lecture-3)

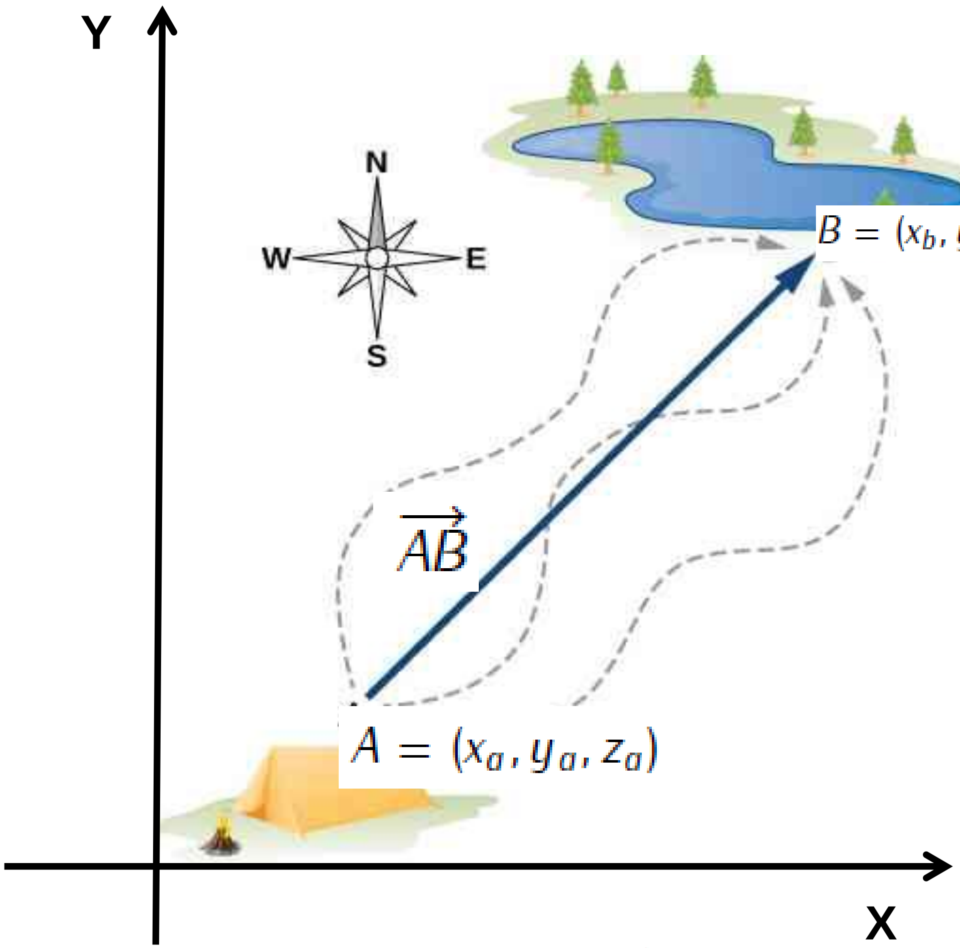


Rys. Układ współrzędnych geograficznych

(rys. źródło: http://docs.autodesk.com/ACD/2014/PLK/)

Wektor - uporządkowana para punktów; wielkość, którą opisujemy podając liczbę i kierunek w przestrzeni.

Jeżeli (na rys.) pierwszy z tych punktów A- początek wektora, B- koniec wektora, oznaczamy $\overrightarrow{AB}$



Rys. Wektor przemieszczenia $\overrightarrow{AB}$.

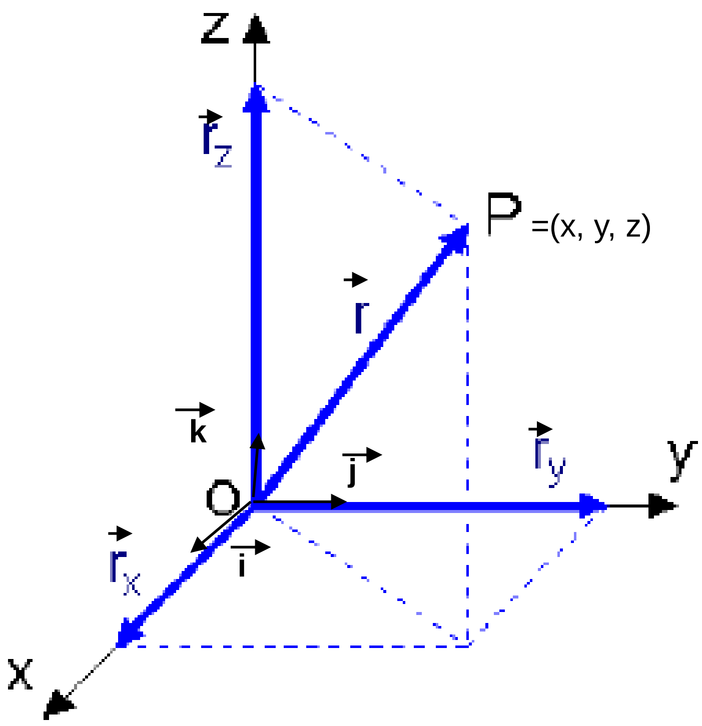
Wektor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left[(x_b - x_a), (y_b - y_a), (z_b - z_a) \right]$$

Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy odległość między punktami A i B :

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

Wersorem osi (wektorem jednostkowym)
nazywamy wektor, którego długość jest równa 1, a kierunek i zwrot jest zgodny z pewną dodatnią półosią układu współrzędnych.



Rys. Wektor $\vec{\mathbf{r}}$ i jego składowe [r_x, r_y, r_z]
w kartezjańskim układzie odniesienia.

Wersorem osi :

OX: $\vec{i} = [1,0,0]$ $\quad$ *możliwy zapis* $\vec{i} \equiv \hat{x}$

OY: $\vec{j} = [0,1,0]$ $\quad$ *możliwy zapis* $\vec{j} \equiv \hat{y}$

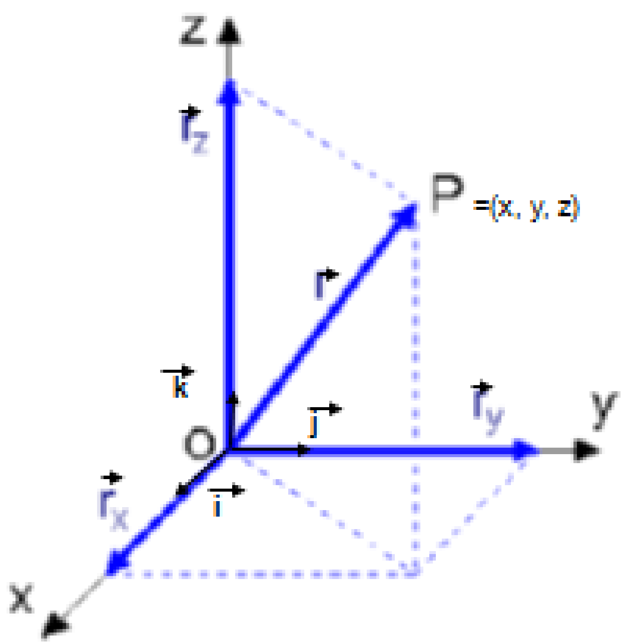
OZ: $\vec{k} = [0,0,1]$ $\quad$ *możliwy zapis* $\vec{k} \equiv \hat{z}$

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

W podobny sposób możemy określić dowolny wektor $\vec{r}$ *(rys.):*

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z \quad (*)$$

$$lub \quad \vec{r} = \left[r_x, r_y, r_z \right]$$



Rys. Wektor $\vec{\mathbf{r}}$ i jego składowe [r_x, r_y, r_z]

Wektory składowe $\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z$ możemy przedstawić w postaci liczb r_x, r_y, r_z i wektorów jednostkowych $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{r}_x = r_x \vec{i}, \quad \vec{r}_y = r_y \vec{j}, \quad \vec{r}_z = r_z \vec{k}$$

Podstawiając te związki do wzoru (*) otrzymujemy:

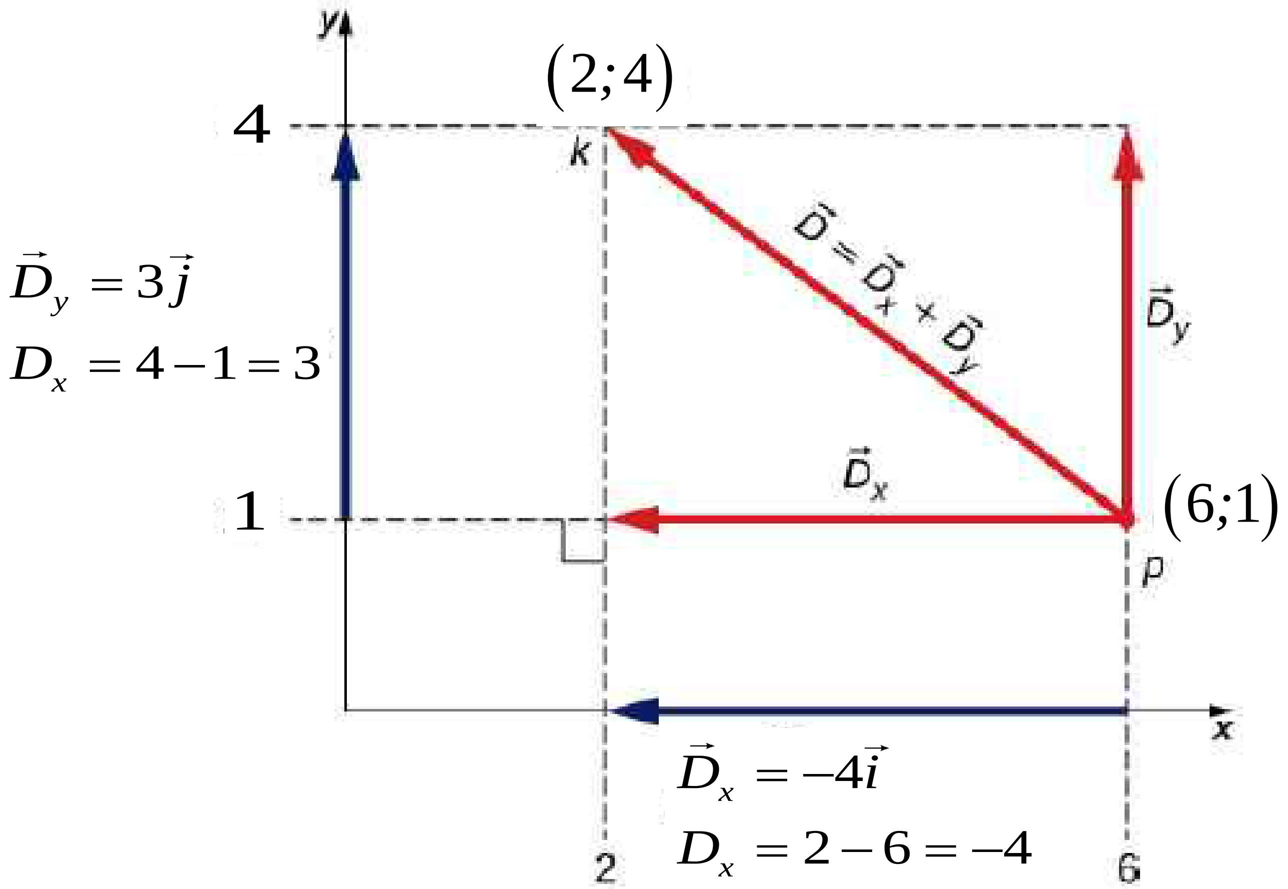
$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

Długość wektora $\vec{r}$:

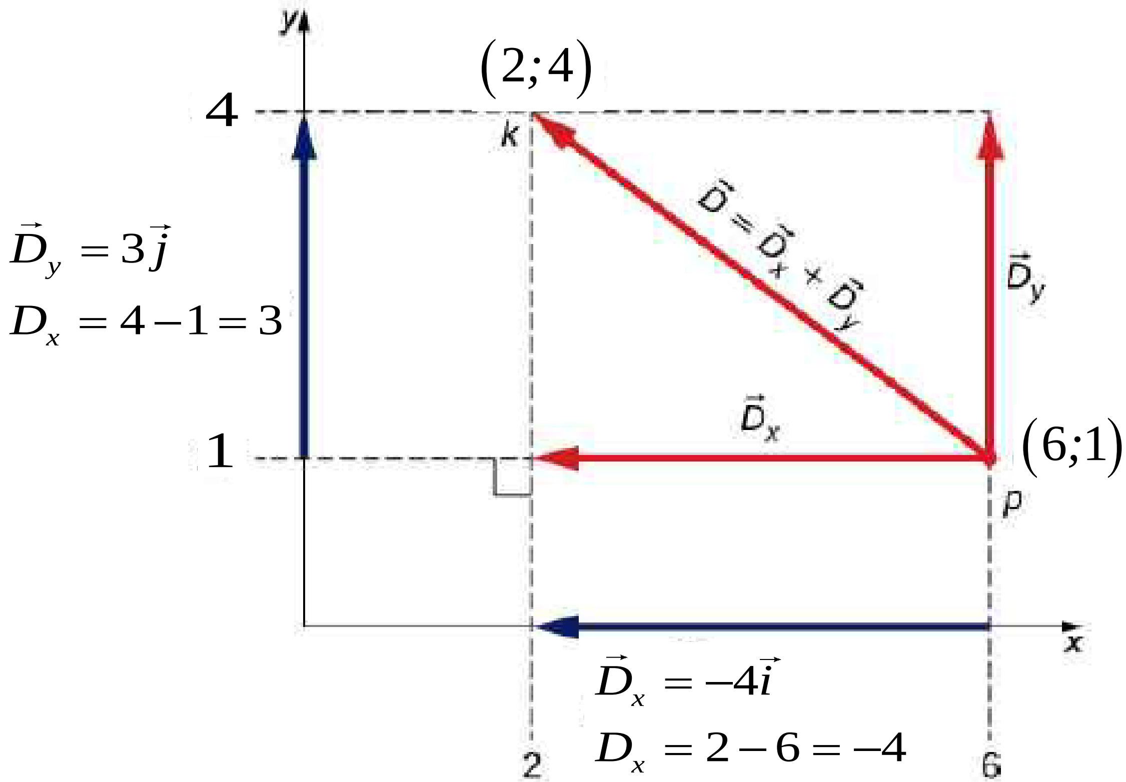
$$\boxed{\left| \vec{r} \right| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

P.1. Przemieszczenie kursora

Przesuwasz kursor z **punktu początkowego (6; 1)** cm na ikonę znajdującą się w punkcie **(2 ; 4) cm** . **Jaki jest wektor przemieszczenia oraz moduł wektora przemieszczenia kursora?**



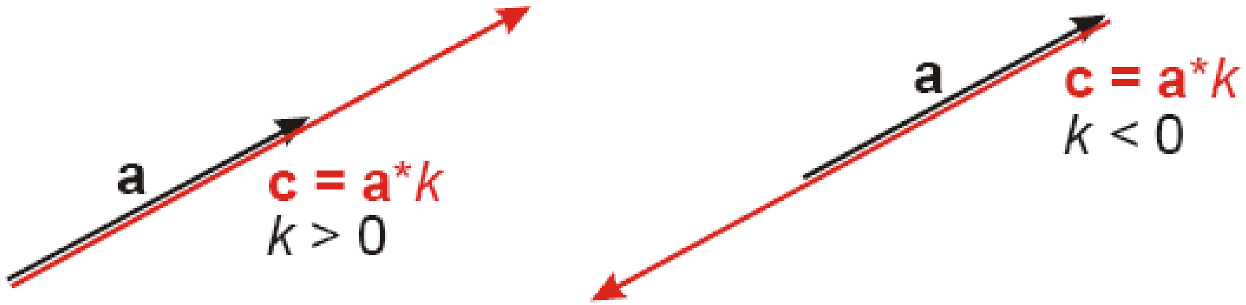
Przykład- rachunek wektorowy



Wektor przemieszczenia : $\vec{D} = D_x\vec{i} + D_y\vec{j} = -4cm\cdot\vec{i} + 3cm\cdot\vec{j}.$

Moduł wektora: $\left|\vec{D}\right| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5cm = 5\cdot 10^{-2}\, m$

Mnożenie wektora przez skalar



$$\begin{cases} c = a^{*}k \\ \mathbf{c} \parallel \mathbf{a} \end{cases}$$

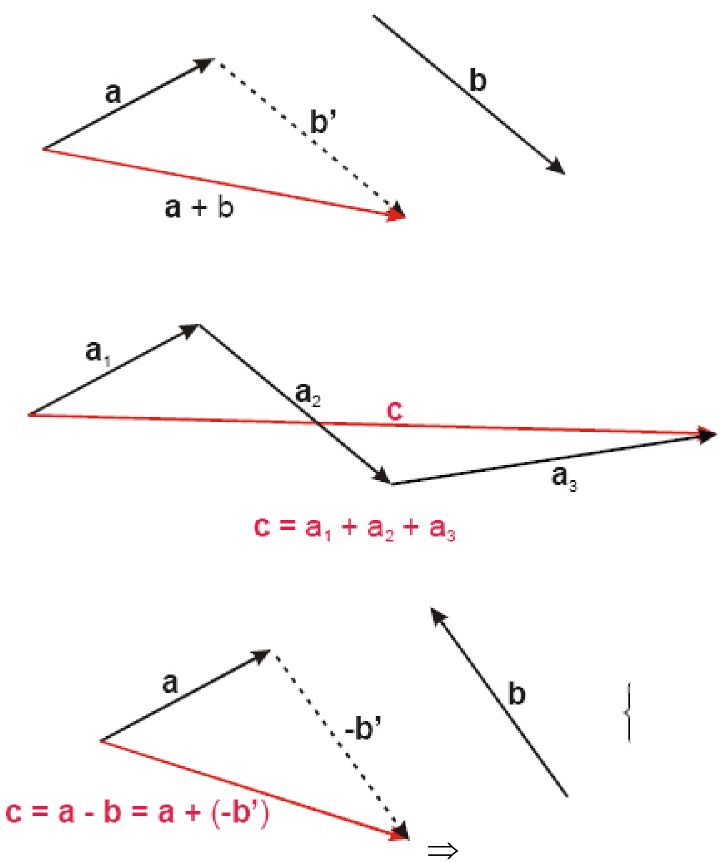
Rys. Mnożenie wektora przez skalar

Iloczynem wektora **a** przez liczbę $k \in R$ nazywamy wektor **c** o długości $|\mathbf{c}| := |\mathbf{a}| \cdot |k|$ o kierunku zgodnym z kierunkiem wektora dla $k > 0$ lub zgodnym z wektorem **a** lecz o zwrocie przeciwnym do zwrotu **a** dla $k < 0$ (rys).

Przykład: $\mathbf{a} = [3; 6; 8]$, $k = 2$ $\mathbf{a} \cdot k = [3 \cdot 2; 6 \cdot 2; 8 \cdot 2] = [6; 12; 16]$.

Zwróćmy uwagę, że gdy $k = 0$, to $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot k = \mathbf{0}$ (wektor zerowy) a nie $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot k = 0$ (liczba zero).

▪DODAWANIE I ODEJMOWANIE WEKTORÓW



Rys. Geometryczna suma i różnica wektorów

Sumą dwóch wektorów a+b jest nowy wektor **c** o współrzędnych:

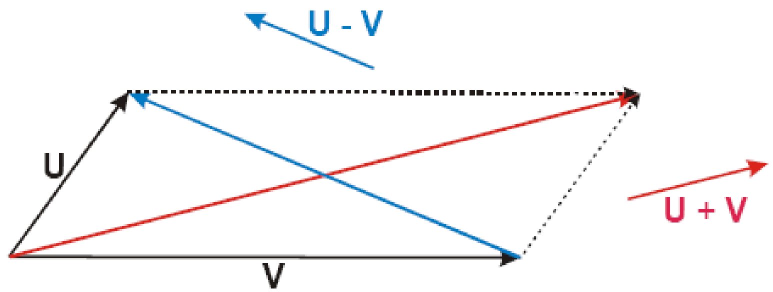
a+**b** = **c**; c = [*cx* ,*cy, cz*] = [*ax*+*bx, ay*+*by, az*+*bz*].

Przykład: **a** = [3, 6, 8]; **b** = [1, 4, 5] **c** = [4, 10, 13].

Różnicą dwóch wektorów a-b jest nowy wektor **c** o współrzędnych:

a-b = **c**; c = [*cx, cy, cz*] = [*ax-bx, ay-by, az-bz*].

Przykład: **a** = [3, 6, 8]; **b** = [1, 4, 5] ⇒**c** = [2, 2, 3].

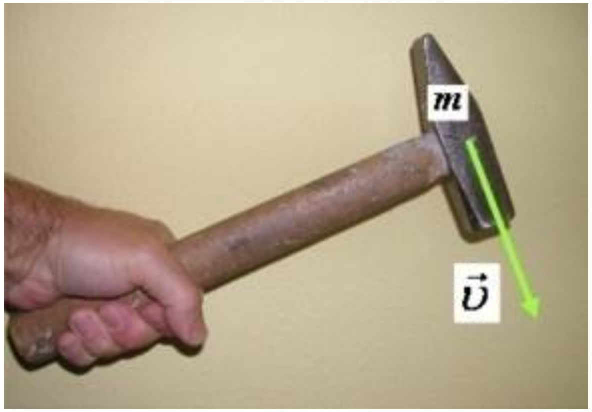


Reguła równoległoboku

Geometrycznie jest to przekątna równoległoboku zbudowanego na tych wektorach.

Różnicę dwóch wektorów przedstawia druga przekątna (rys. prawy).

Wielkości fizyczne

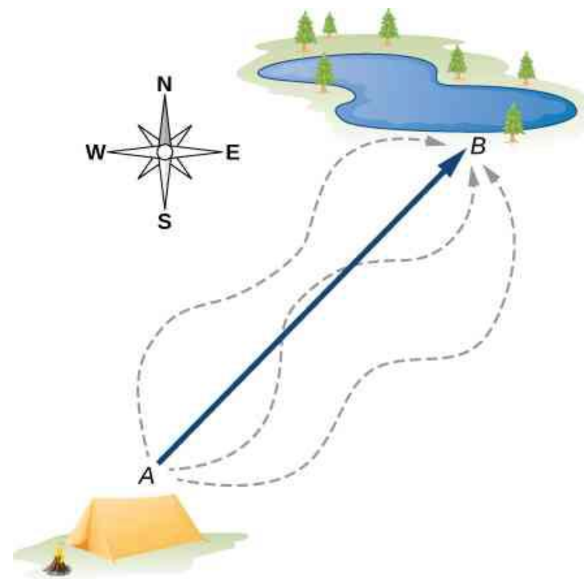


Rys.Masa młotka jest skalarem, ale jego prędkość jest wektorem

1) **Skalarne- mają jedynie wartość**, nie zależą od wyboru układu współrzędnych. Przykłady: masa, objętość, czas, ładunek, temperatura, praca.
2) **Wielkości wektorowe posiadają wartość, kierunek, zwrot i punkt przyłożenia.** Przykłady: prędkość, przyspieszenie, siła, pęd, natężenie pola, **.**

Cechy wektora:

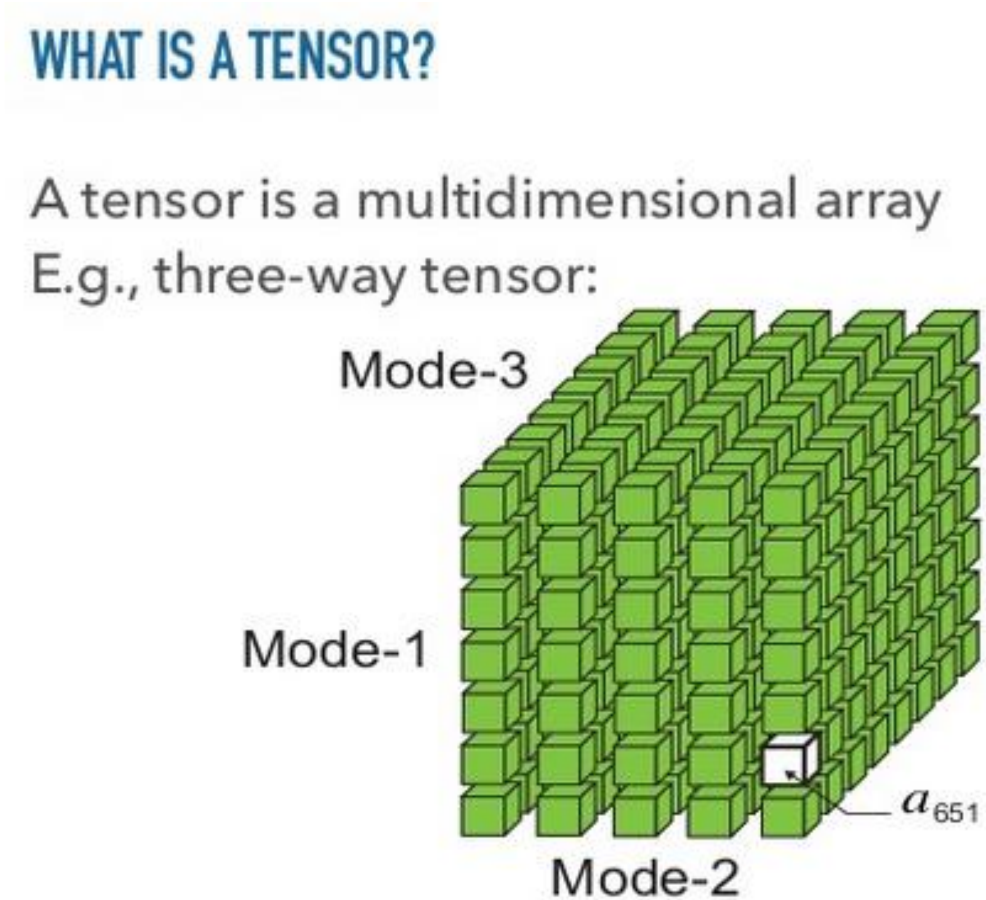
1) punkt przyłożenia,
2) wyróżnia pewien kierunek w przestrzeni, (kierunek prostej, do której wektor jest równoległy),
3) zwrot,
4) wartość bezwzględną (długość wektora, jego wartość liczbowa, moduł).



Rys. źr. Fizyka dla szkół wyższych S. Ling, J.Sanny, W. Moebs

Spośród kilku używanych sposobów sygnalizowania, że dany symbol jest wektorem, wybierzemy jeden - rysowanie strzałki nad symbolem, na przykład $\vec{p}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$. Wartość bezwzględną (moduł) wektora **F** oznaczamy symbolem $|\vec{F}|$ albo F .

3) Tensor , to wielkość do opisania której podajemy macierz współczynników. W przestrzennym układzie współrzędnych (3–wym.) tensor to 9 liczb nazywanych współczynnikami.



Rys. źródło: www.slideshare.net/panisson/exploring-temporal-graph-data-with-python-a-study-on-tensor-decomposition-of-wearable-sensor-data

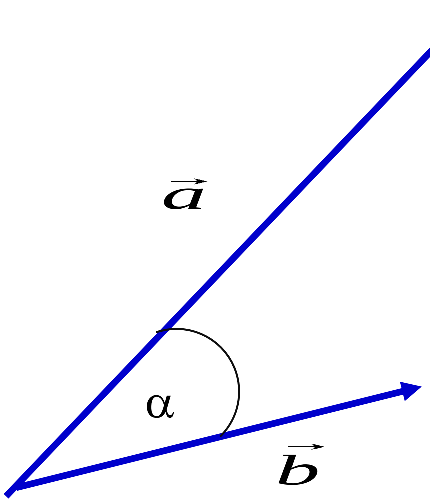
Niech dane są dwa wektory niezerowe: $\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z\right]$ i $\vec{b} = \left[b_x, b_y, b_z\right]$,

iloczyn skalarny wektorów ($\vec{a} \bullet \vec{b}$), jest liczbą określoną wzorem

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = C$$

gdzie α - kąt między wektorami (patrz rys.)



WŁASNOŚCI ILOCZYNU SKALARNEGO:

a) $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (jest przemienny),

b) $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ wtedy $\vec{a} \perp \vec{b}$

c) $\vec{a} \bullet \vec{a} = a^2$

Przykład 1 -praca wykonywana przez siłę

Kiedy siła $\vec{F}$ ciągnie ciało powodując przemieszczenie $\Delta\vec{r}$, to mówimy , że siła wykonuje **pracę**, którą można przedstawić jako **iloczyn skalarny dwóch wielkości wektorowych** :

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}$$

$$[1J] = [1N \cdot m]$$

Jaka praca zostanie wykonana przez siłę $\vec{F}$ = [5, 4,12] N powodującą przemieszczenie ciała o wektor $\Delta\vec{r}$ = [30,40,0] cm ?

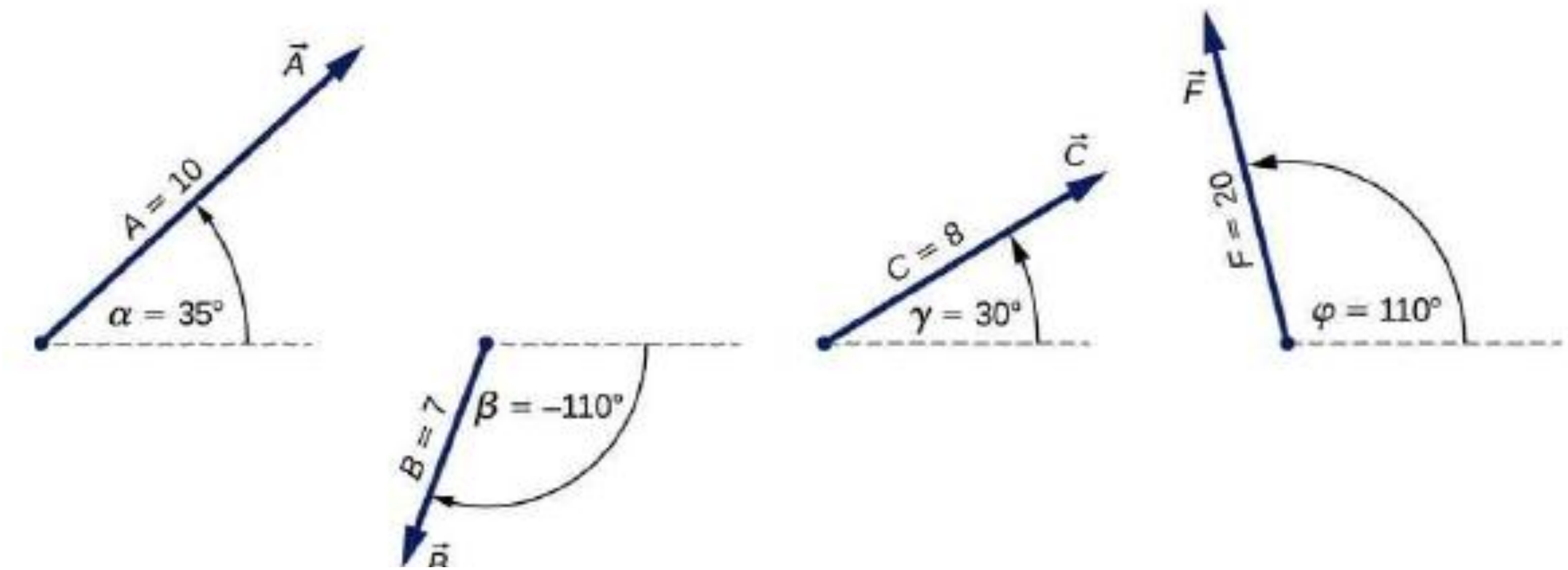
Rozwiązanie:

Pamiętając o zamianie jednostki (1 cm=10^{-2} m) otrzymujemy::

$$W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} \quad = 5N \cdot 0{,}3m + 4N \cdot 0{,}4m + 12N \cdot 0m = 3{,}1J$$

Przykład 2 –znajdź kąt między wektorami (tablica**)**

a) Znajdź iloczyn skalarny wektorów $\vec{A} \bullet \vec{F}$ (wektory przedstawione są na rys.)



$$\vec{A} \cdot \vec{F} = AF\cos\theta = 10{,}0 \cdot 20{,}0 \cdot \cos 75^\circ = 51{,}76.$$

b) Znajdź iloczyny skalarne wektorów : $\vec{A} \bullet \vec{B},\ \vec{F} \bullet \vec{C}.$

$$Odp.:\ \vec{A} \bullet \vec{B} = -57{,}34$$

$$\vec{F} \bullet \vec{C}. = 27{,}78$$

ILOCZYN WEKTOROWY- definicja

Dane są dwa wektory niezerowe : $\vec{a} = \left[a_x, a_y, a_z \right]$ i $\vec{b} = \left[b_x, b_y, b_z \right]$,

iloczynem wektorowym $\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}}$ jest wektor $\vec{c}$, **zdefiniowany następująco:**

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \vec{i} + a_x b_y \vec{k} + b_x a_z \vec{j} - b_x a_y \vec{k} - b_y a_z \vec{i} - a_x b_z \vec{j} =$$

$$\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \end{matrix}$$

$$= \left(a_y b_z - b_y a_z \right) \vec{i} + \left(b_x a_z - a_x b_z \right) \vec{j} + \left(a_x b_y - b_x a_y \right) \vec{k} =$$

$$= \left[\underbrace{\left(a_y b_z - b_y a_z \right)}_{c_x}, \underbrace{\left(b_x a_z - a_x b_z \right)}_{c_y}, \underbrace{\left(a_x b_y - b_x a_y \right)}_{c_z} \right]$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left[\left(a_y b_z - a_z b_y \right), \left(a_z b_x - a_x b_z \right), \left(a_x b_y - a_y b_x \right) \right]$$

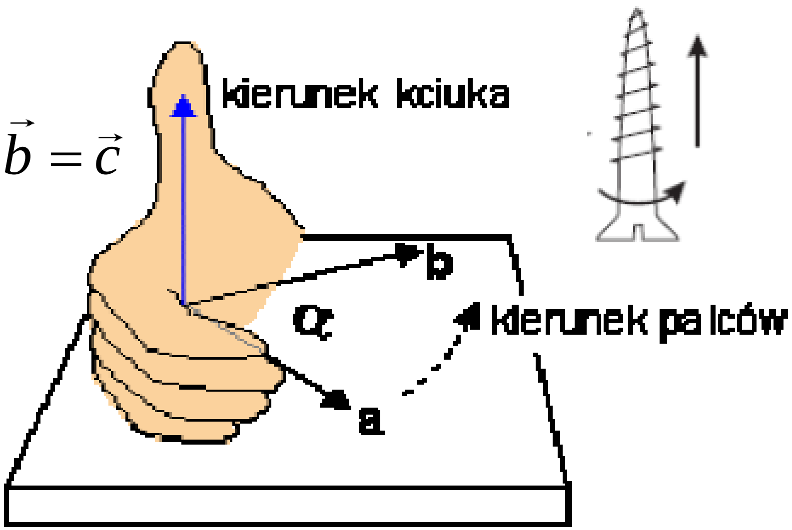
WARTOŚĆ ILOCZYNU WEKTOROWEGO- definicja

Długość wektora $|\vec{c}|$:

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$$

gdzie α- kąt między wektorami ($\vec{a},\vec{b}$) i mierzy się go od wektora $\vec{a}$ (pierwszego wektora w iloczynie) w kierunku wektora $\vec{b}$ jak przedstawiono na rysunku.
Kąt ten przyjmuje wartości od 0° do 180° .

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$



Rys. Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest wektorem

- Wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- Kierunek $\vec{c}$ jest określony regułą śruby prawoskrętnej lub regułą prawej dłoni (rys).

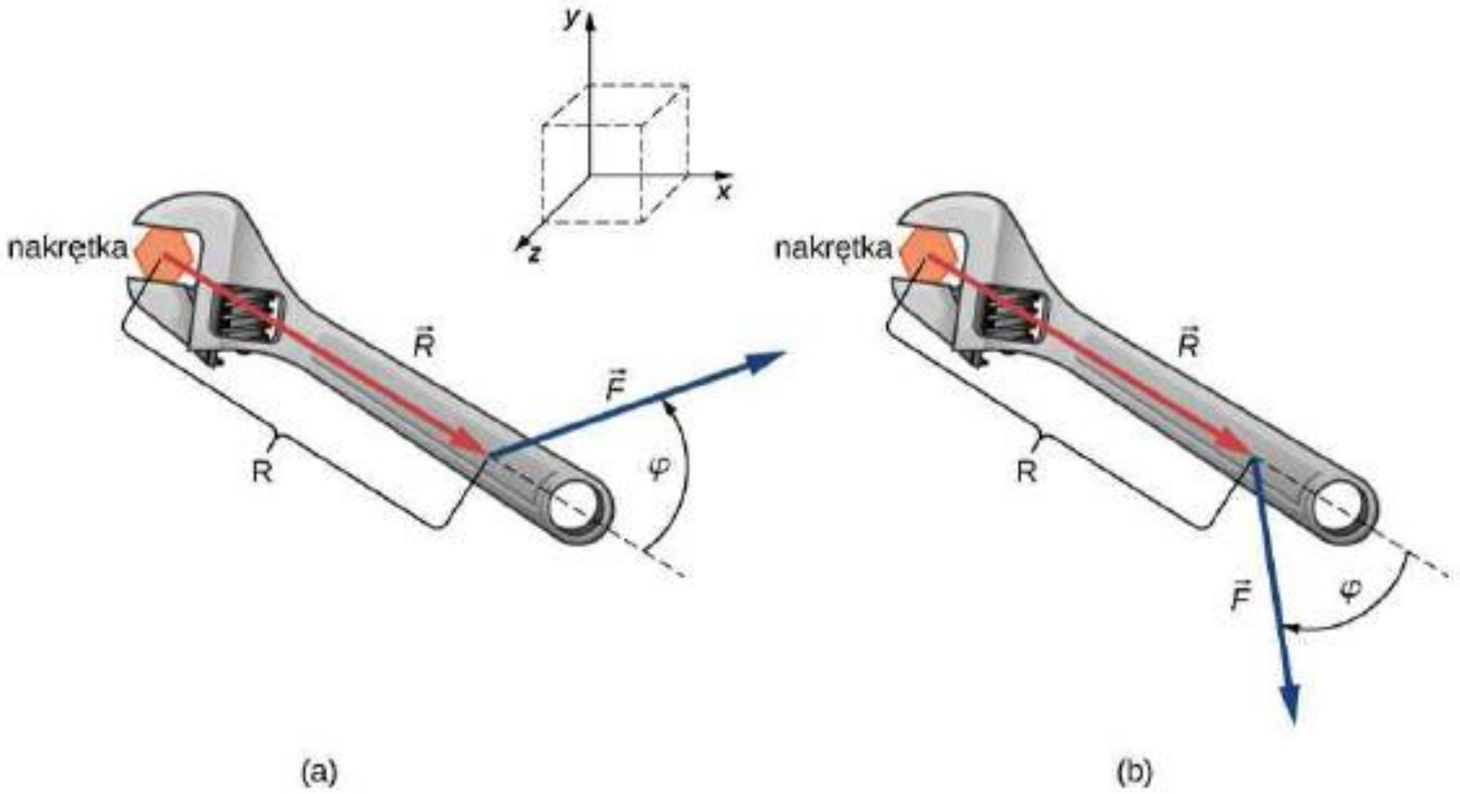
<u>Własności iloczynu wektorowego</u>:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (nie jest przemienny),
b) jeżeli $\vec{a}$ i $\vec{b}$ różne od zera, a $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} II \vec{b}$

Przykład (tablica).

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| sin\left(\measuredangle \vec{r}, \vec{F}\right)$$



Rys. Stosując klucz w celu odkręcenia (zakręcenia) nakrętki, uzyskujemy zysk mechaniczny.
(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, aby poluzować nakrętkę.
(b) Obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, aby dokręcić nakrętkę.

W układzie kartezjańskim XYZ, do ciała przyłożono siłę $\vec{F} = [1,4,2]\,N$, która działa na ciało w odległości $\vec{r} = [-2,1,3]\,m$. Oblicz moment siły $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ i kąt α zawarty między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{F}$.

Rozwiązanie:

Dane:

$\vec{F} = [1,4,2]\,N$

$\vec{r} = [-2,1,3]\,m$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Szukane:

$a)\ \vec{M} = ?$

$b)\ \alpha = ?$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{array}{|ccc|} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{array} = 2\vec{i} + -8\vec{k} + 3\vec{j} - 1\vec{k} - 12\vec{i} - (-4\vec{j}) =$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$= -10\vec{i} + 7\vec{j} - 9\vec{k} = [-10, 7, -9].$$

Przykład 1- ad b)

Ad. b) α=?

I sposób z il. wektorowego- poniżej; II sposób z il. skalarnego- samodzielnie :)

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \cdot sin\,\alpha$$

$$sin\,\alpha = \frac{\left|\vec{M}\right|}{\left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|}$$

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 7^2 + (-9)^2} = \sqrt{230}$$

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{14}$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{21}$$

$$sin\,\alpha = \frac{\sqrt{230}}{\sqrt{14}\sqrt{21}} \Rightarrow sin\,\alpha = 0{,}884485$$

$$stąd\;\; \alpha = arcsin\left(0{,}884485\right) \approx 62{,}188^0 \approx 62^0$$

FUNKCJE

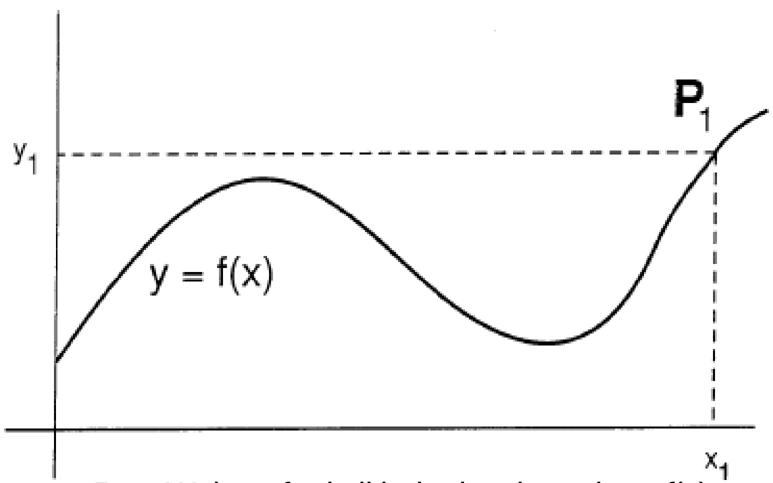
Niech X i Y będą dowolnymi niepustymi zbiorami. Jeżeli każdemu elementowi zbioru X *zostanie przyporządkowany jeden i tylko jeden element zbioru* Y, to takie odwzorowanie (przekształcenie) nazywamy funkcją *f* odwzorowującą (przekształcającą) zbiór X w zbiór Y. Będziemy to zapisywać w postaci:

$$f: X \to Y \qquad \text{lub } y = f(x)$$

- Każdy element x *(zbioru* X*)* nazywamy **zmienną niezależną** albo **argumentem** funkcji,
- zaś y *(element zbioru* Y*)* - **zmienną zależną** albo **wartością** funkcji.

Funkcje mogą być wyrażone:

1) analitycznie, np. $y = ax; y = \ln x$,
2) graficznie, w postaci wykresu,
3) numerycznie, w postaci tablic.



Rys. Wykres funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$

Taka krzywa (rys.), może przedstawiać dane obserwacyjne lub zależność algebraiczną (równanie).

Przykładem pierwszej sytuacji (dane obserwacyjne) byłby wykres temperatury w pewnym miejscu i czasie jako funkcja wysokości. Wtedy x oznacza wysokość ponad powierzchnią Ziemi, powiedzmy w metrach, a y temperaturę, na przykład w stopniach Celsjusza.

Jeśli dwie zmienne niezależne oznaczymy x i y, a zmienną zależną - z, zależność funkcyjną zapiszemy jako $z = f(x,y)$.

Np. temperatura powietrza w danym miejscu zależy nie tylko od wysokości, ale także od czasu; w czerwcu temperatura będzie inna niż w styczniu, a w południe inna niż o północy.

Podstawowy cel rachunku różniczkowego to opis zmian wartości funkcji pod wpływem ciągłej zmiany jej argumentu.

POCHODNA FUNKCJI w punkcie x_0

Niech dwóm argumentom x i x_0 odpowiadają dwie wartości funkcji y i y_0.
Oznaczmy $x - x_0 = \Delta x$ - przyrost argumentu i $y - y_0 = \Delta y$ - przyrost wartości funkcji .

Niech $U \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem otwartym i funkcja $y = f(x)$; $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.
Jeśli dla pewnego $x_0 \in U$ istnieje skończona **granica ilorazu różnicowego** ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$)

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{dy}{dx}} \qquad (\text{lub } \; y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x})$$

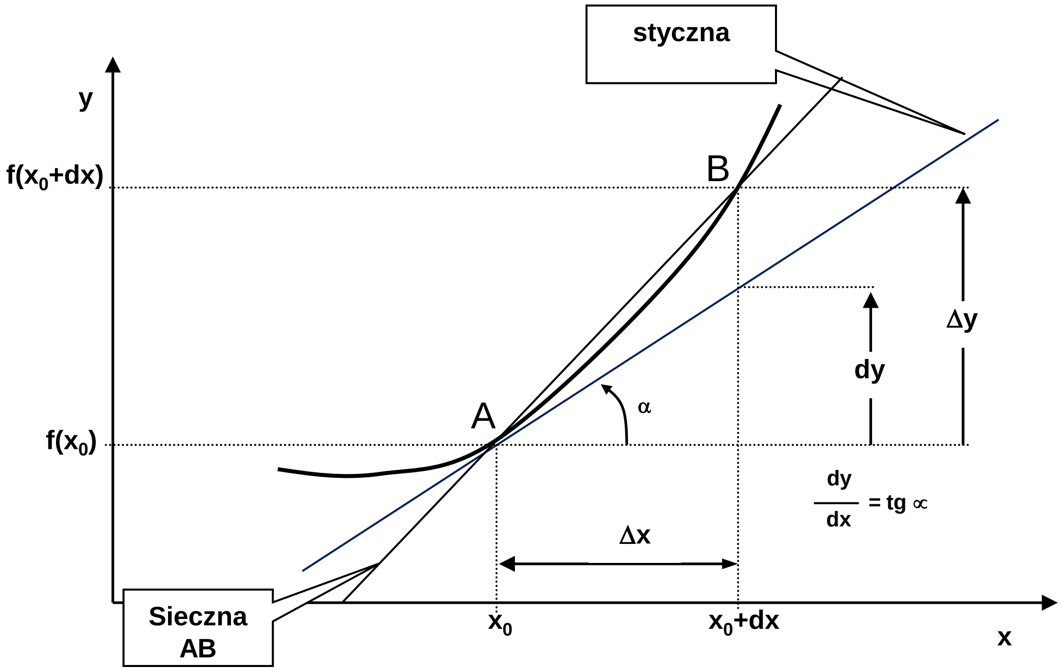
to mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest **różniczkowalna** w punkcie x_0 . Wartość powyższej granicy nazywamy **pochodną funkcji** f(x) w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem $f'(x_0)$

Wyrażenie $dy = f'(x_0)dx$, nazywa się *różniczką funkcji* $y = f(x)$, zaś *dx różniczką argumentu x.*
Obliczanie pochodnej nazywamy różniczkowaniem.

❑Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji :

$x - x_0 = \Delta x$ - przyrost argumentu

$y - y_0 = \Delta y$ - przyrost wartości funkcji



$$y' \equiv f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = tg\alpha$$

Pochodna – granica ilorazu różnicowego. Tangens kąta (α) pomiędzy styczną do wykresu funkcji w punkcie (x_0, $f(x_0)$), a osią OX.

❑POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH- wybrane przykłady

1. $(C)' = 0$, np. $(5)' = 0$

2. $(x^n)' = n x^{n-1}$, np. $(x^4)' = 4x^3$;

$(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$

❑POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

③ $(\sin x)' = \cos x$

④ $(\cos x)' = -\sin x$

⑤ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\left(\overset{\text{zał.}}{x>0}\right)$

⑥ $(e^x)' = e^x$

⑦ $(a^x)' = a^x \ln a$

❑PODSTAWOWE WZORY RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego:

1. $$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$$

np. $$\left(5x^2+3x\right)' = 10x + 3$$

2. $$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

np. $$\left(5\cdot x^4\right)' = \underbrace{5'}_{0}\cdot x^4 + 5\cdot\left(x^4\right)' = 0 + 20x^3 = \underline{20x^3}$$

❑POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

Stąd ③

$$\left(a\cdot f(x)\right)' = a\cdot f'(x)$$

④ $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

np. $$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

stąd $$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

5 $$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

np. $$\big(\sin(2x)\big)' = \cos(2x) \cdot (2x)' =$$
$$= \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

❑POCHODNE FUNKCJI ELEMENTARNYCH

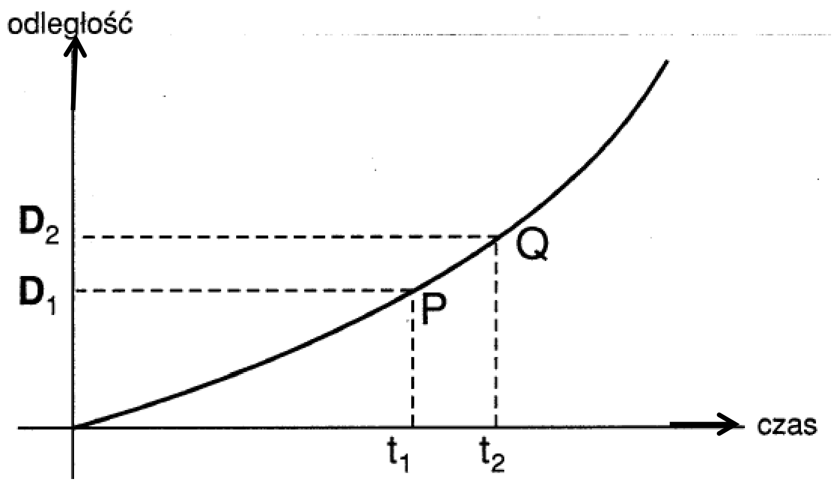
Funkcja	Pochodna	Uwagi
C	0	$c \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
sinx	cosx	
cosx	-sinx	
tgx	$\frac{1}{cos^2 x}$	
ctgx	$-\frac{1}{sin^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
lnx	$\frac{1}{x}$	x > 0
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	a > 0

DRUGA I DALSZE POCHODNE FUNKCJI

Przypuśćmy teraz, że mamy daną funkcję $f(x)$ i jej pochodną $f'(x)$. Możemy powtórzyć opisaną procedurę i obliczyć pochodną funkcji $f'(x)$. Tę nową funkcję nazywamy drugą pochodną i oznaczamy $f''(x)$. Podobnie określa się trzecią pochodną oraz kolejne. Ze względu na czytelność zapisu apostrofami oznacza się jedynie pochodne do trzeciej włącznie (czasem tylko do drugiej). Dalsze pochodne oznacza się liczbami rzymskimi: $f''', f^{IV}, f^{V}, \ldots$

Przykłady zastosowań w fizyce.

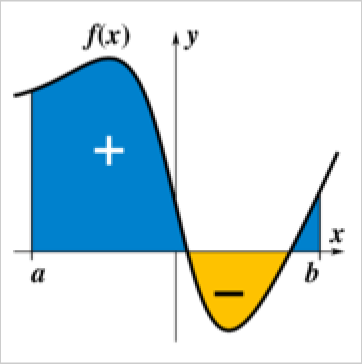
Jeśli funkcja wyraża położenie w zależności od czasu, to jej pochodna jest prędkością chwilową. Druga pochodna położenia (pierwsza pochodna prędkości) jest przyspieszeniem, trzecia natomiast to zryw.



Całka (ang. *integral*) to termin wieloznaczny i wymagający bliższego określenia, takiego jak całka nieoznaczona, całka oznaczona, całka niewłaściwa czy całka równania różniczkowego.
Jeśli mówimy po prostu "całka", to zazwyczaj mamy na myśli całkę nieoznaczoną.

Funkcja pierwotna

Całką nieoznaczoną lub *funkcją pierwotną funkcji* $y = f(x)$ nazywamy taką funkcję F(x), której pochodna jest równa danej funkcji $f(x)$, czyli:



$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

Całkę nieoznaczoną zapisujemy symbolicznie:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad gdy \quad F'(x) = f(x)$$

PODSTAWOWE WZORY:

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int r \cdot f(x)dx = r\int f(x)dx, \quad r \in R$
- $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C, \quad r \in R - \{-1\}$

- $\int dx = \int 1dx = \int x^0 dx = x + C$
- $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C, \quad x \in R - \{0\}$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in R_+ - \{1\}$

- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \cos x dx = \sin x + C$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Całkowanie przez:

- **części**

Jeżeli u(x) i v(x) są funkcjami mającymi ciągłe pierwsze pochodne to:

$$\int \mathbf{u \cdot v' dx = u \cdot v} - \int \mathbf{u' \cdot v dx}$$

- **podstawienie**

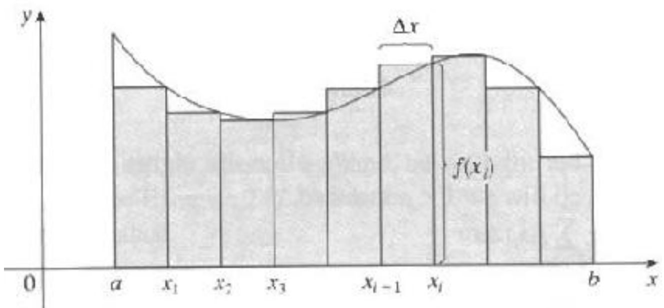
Jeżeli f(x) = g (h(x)) · h'(x), gdzie t = h(x) jest funkcją o ciągłej pochodnej to:

$$\int \mathbf{f(x)dx} = \cdot \int \mathbf{g\,(h(x)) \cdot h'(x)dx} = \int \mathbf{g(t)dt}$$

CAŁKA OZNACZONA

Niech f będzie funkcją ciągła zdefiniowaną dla $a \le x \le b$. Podzielmy przedział $[a, b]$ na n podprzedziałów o równej długości wynoszącej $\Delta x = (b - a)/n$. Niech $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$ będą końcami tych podprzedziałów i niech $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ będą dowolnymi **punktami próbkującymi** w tych przedziałach, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Wówczas **całkę oznaczoną** z funkcji f w przedziale od a do b oznaczamy i definiujemy jako:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$



Symbol całki $\int$ został wprowadzony przez Leibniza i nawiązuje do kształtu literki S - jako, że mamy do czynienia z obliczaniem sum. W zapisie $\int_a^b f(x)dx$ funkcję f nazywamy **funkcją podcałkową**, liczbę a **dolną granicą całkowania**, a liczbę b **górną granicą całkowania**. Proces znajdowania całki zwiemy **całkowaniem**. Występującą w definicji sumę $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ nazywamy **sumą Riemanna** - w przypadku, gdy f przyjmuje wartości dodatnie, może być interpretowana jako suma pól prostokątów, którymi przybliżamy pole pod wykresem funkcji.

Dziękuję za uwagę !