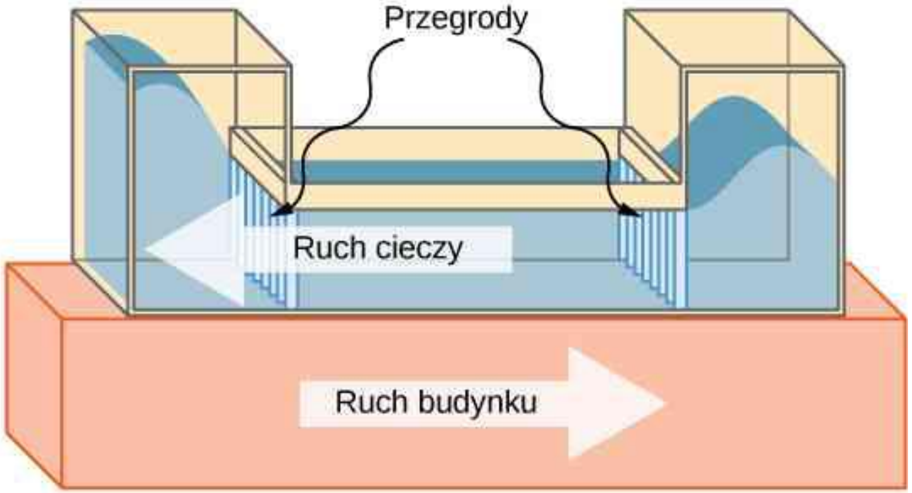
RUCH DRGAJĄCY

A



B

A. Budynek o wysokości około 305 m w Filadelfii , górne piętra wieżowca mogą ulegać oscylacjom bocznym z powodu aktywności sejsmicznej i podmuchów wiatru.
B. Schematyczny rysunek- przestrajalny masowy tłumik drgań w postaci kolumn z wodą o objętości 1100 m^3. Zainstalowany na szczycie budynku ; układ zmniejsza amplitudę jego drgań.
Zdjęcie źródło: http://cnx.org/content/col23946/1.1

„Opowiem ci o wiedzy. Uznać to, co znane, za znane,

a to co nieznane, za nieznane, to jest wiedza. ”

Konfucjusz (właściwie K'ung Ch'iu, 551 – 479 p.n.e.) Dialogi, II/17

Wykład 7

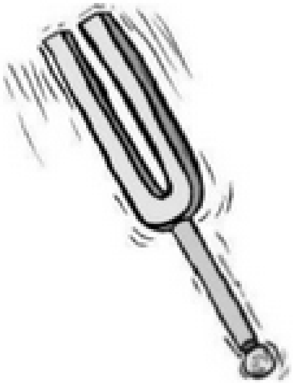
RUCH DRGAJĄCY

7.1. Drgania harmoniczne

7.2. Drgania tłumione

7.3. Drgania wymuszone

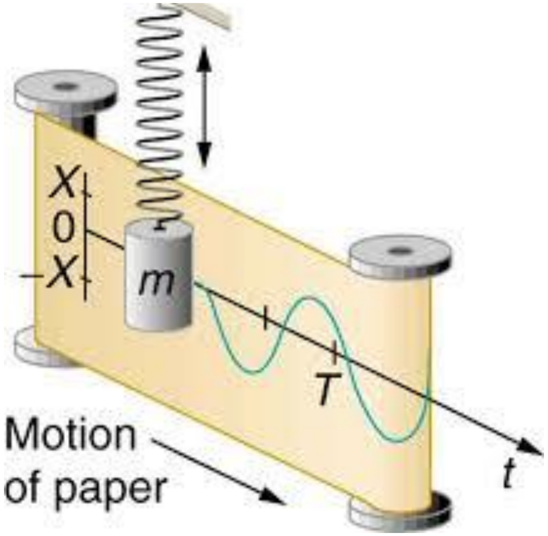
7.4. Drgania złożone



Co to są drgania periodyczne ?

• **Ruch drgający (oscylacje)** – ruch ciała zachodzący wokół stałego położenia równowagi. Rozróżniamy ruchy drgające *okresowe i nieokresowe.*

• **Drganie okresowe (periodyczne)** – powtarzanie zachodzi zawsze po tym samym czasie T, zwanym **okresem.**



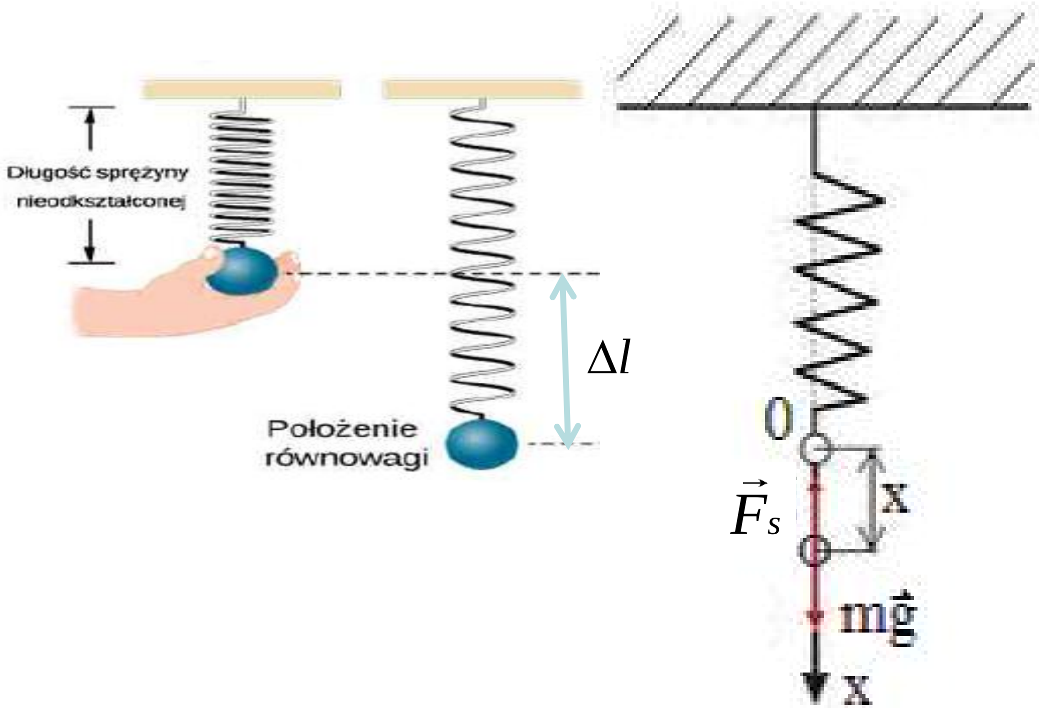
•Oznaczmy położenie punktu materialnego na osi x w chwili t przez x(t). Ruch jest okresowy, jeżeli dla dowolnego t :

$$x(t) = x(t+T)$$

•Bardzo powszechnym ruchem periodycznym jest ruch harmoniczny .

• Układ, który swobodnie oscyluje i wykonuje ruch harmoniczny, jest oscylator harmoniczny

Co charakteryzuje ruch harmoniczny ?



$$F_s \sim x$$

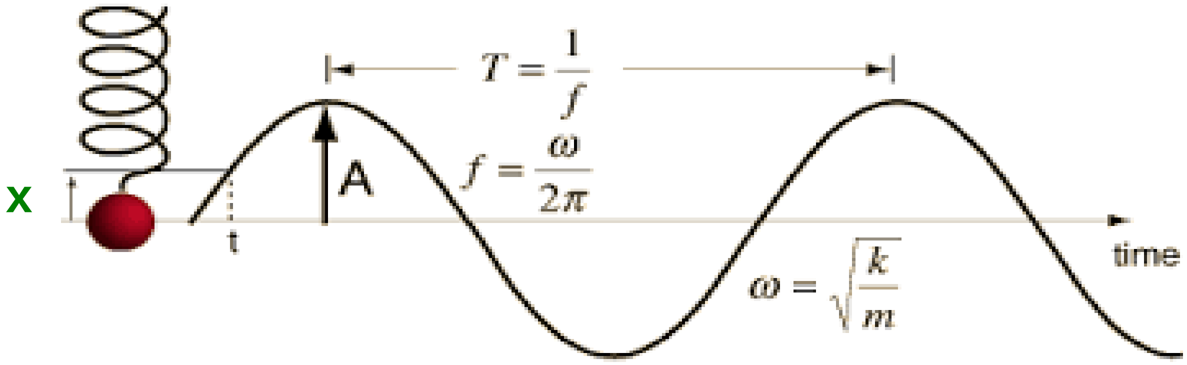
Podczas ruchu harmonicznego działa stale na ciało siła ***F***, która w każdej chwili jest zwrócona ku położeniu równowagi i jest proporcjonalna do wychylenia:

siła odkształcająca sprężynę

$$F_s = -kx\,,$$

współczynnik sprężystości k: $k = \dfrac{F}{\Delta l}\quad\left[\dfrac{N}{m}\right]$

zmiana długości



Ruch drgający nazywamy ruchem harmonicznym (drgania harmoniczne) , gdy wychylenie ciała z położenia równowagi opisane jest funkcją harmoniczną (sinus lub cosinus):

przemieszczenie w chwili t

faza

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)} \qquad (*)$$

amplituda

czas

częstość kołowa

faza początkowa

gdzie: -A jest **amplitudą** drgań (maksymalną zmianą względem położenia równowagi);

- $(\omega t + \varphi_0)$ to **faza** drgań (mierzona w radianach bądź stopniach);φ_0- **faza początkowa;**

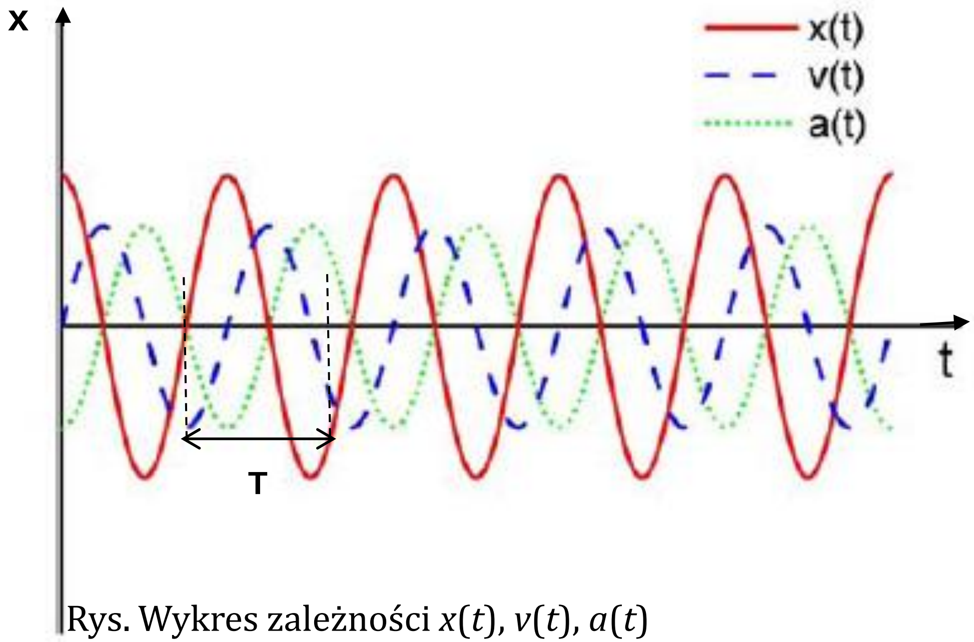
- $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$ to **częstość kołowa** (pulsacja) (rad/s).

- Drganie opisane równaniem (*) nazywamy **drganiem harmonicznym.**

- **W ruchu harmonicznym**: **położenie:** $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

prędkość: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$

przyspieszenie: $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x(t)$



Rys. Wykres zależności $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ dla ruchu harmonicznego.

- Wielkością charakteryzującą ruch jest też **częstotliwość** drgań:

$$f = \frac{1}{T} \quad \left(1Hz = \frac{1}{s}\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

częstość kołowa

okres drgań

Przykład 1- Ustalenie częstotliwości fal stosowanych w ultrasonografii (USG)

Aparat USG emituje fale dźwiękowe o wysokiej częstotliwości, które odbijają się od narządów. Rejestracja i obróbka komputerowa danych pozwala uzyskać obraz, który następnie analizuje lekarz. Rozważmy urządzenie USG generujące dźwięki z oscylacjami o T= 0,4 μs . Jaka jest częstotliwość tych drgań f=?

Rozwiązanie:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{0{,}4 \cdot 10^{-6}\, s} = 2{,}5 \cdot 10^{6}\, Hz = 2{,}5\ \ MHz$$

Znaczenie

Ta częstotliwość dźwięku jest znacznie wyższa niż najwyższa częstotliwość, jaką człowiek może usłyszeć (zakres słyszalności dźwięków u człowieka wynosi od 20 Hz do ok. 20 000 Hz) dlatego falę tę nazywamy ultradźwiękową. Drgania generowane przez urządzenia USG o tak wysokiej częstotliwości umożliwiają nieinwazyjną diagnostykę medyczną, np. obserwację płodu w łonie matki.

Przykład 2- ruch harmoniczny (rozwiązać samodzielnie)

Klocek o masie 2 kg umieszczono na idealnie gładkiej powierzchni, a tarcie nie wpływa na ruch klocka. Sprężynę o współczynniku sprężystości k = 32 N/m przymocowano do klocka, a jej przeciwny koniec przyczepiono do ściany. Sprężyna może ulec skróceniu lub rozciągnięciu. Położenie równowagi układu oznaczono jako x = 0,00 m.

Praca wykonana nad klockiem powoduje jego przesunięcie do położenia x = 0,02 m .

Klocek puszczono swobodnie, powodując jego oscylacje w zakresie wartości przemieszczeń pomiędzy x = +0,02 m , a x = −0,02 m . Okres drgań wynosi 1,57 s.

Wyznacz: częstość, maksymalną wartość prędkości i przyspieszenia klocka. Dla dowolnej chwili ruchu drgającego określ położenie, prędkość i przyspieszenie.

Odp.:

$$\omega = 4,0 \ \frac{rad}{s}$$

$$v_{max} = 0,08 \ \frac{m}{s};$$

$$a_{max} = 0,32 \ \frac{m}{s^2},$$

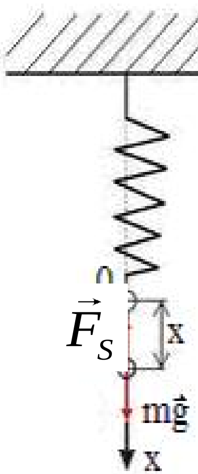
$$x(t) = 0,02 \cos(4t)$$

$$v(t) = -0,08 \sin(4t),$$

$$a(t) = -0,32 \cos(4t).$$

RÓWNANIE RUCHU DLA OSCYLATORA HARMONICZNEGO

Rozważmy drgania **prostego oscylatora harmonicznego (**masa ***m*** przyczepiona do sprężyny o stałej sprężystości ***k*** *).*



Siła sprężystości :

$$F_s = -kx$$

Z II zasady dynamiki Newtona: $F_s = ma$

A zatem: $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Równanie różniczkowe drgań harmonicznych oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (*)$$

, gdzie $\omega^2 = \frac{k}{m}$

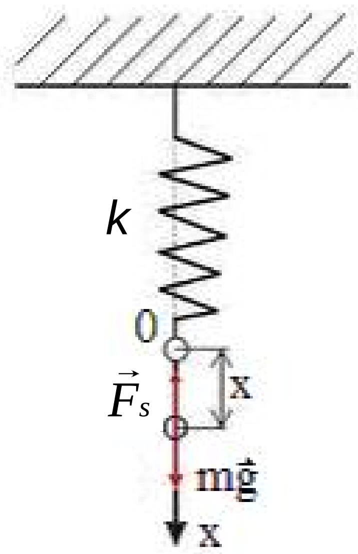
Równanie (*) można napisać również :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Rozwiązaniem równania (*): $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Okres i częstotliwość drgań masy na sprężynie

Częstość kołowa:



$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wykorzystując wzór: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Otrzymujemy wzór na okres drgań (takiego oscylatora) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Wnioski:

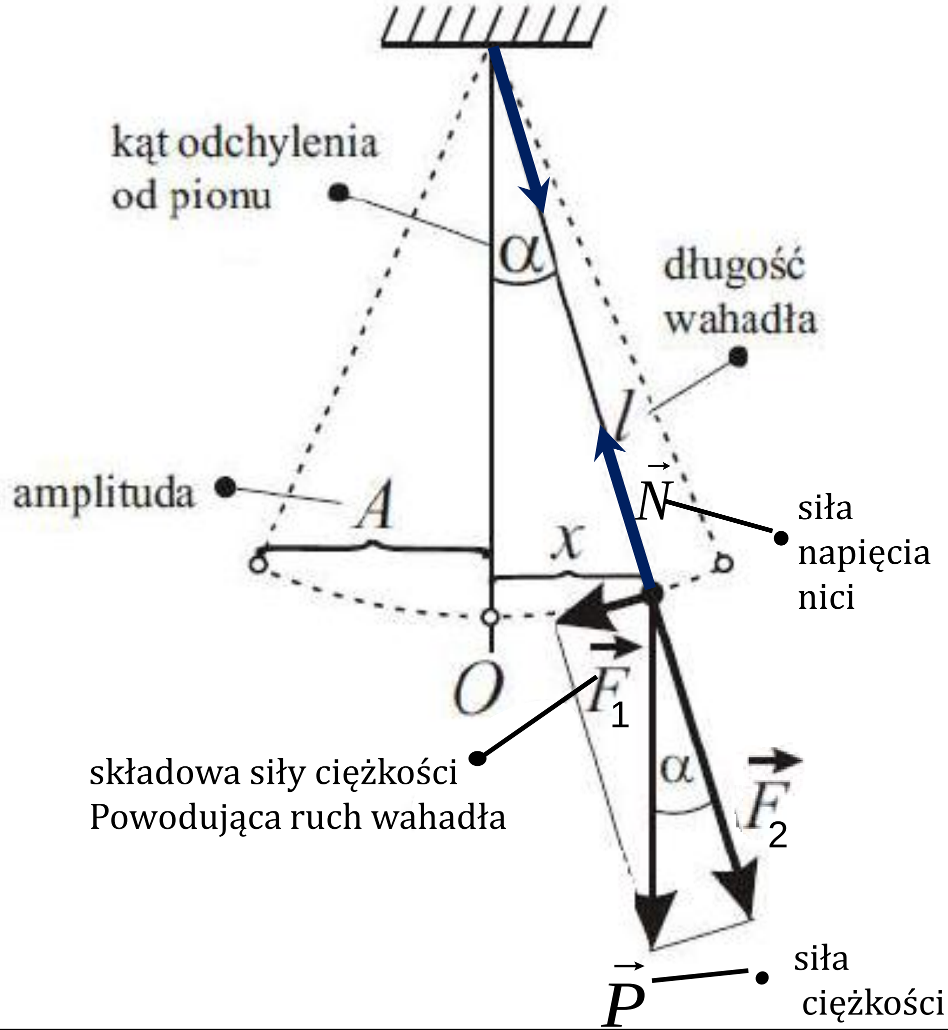
- Częstość kołowa zależy jedynie od współczynnika sprężystości i masy klocka, a nie od amplitudy drgań;
- Im większa masa, tym dłuższy okres, a im sztywniejsza sprężyna, tym okres jest krótszy.

Przykład 3 - okres drgań wahadła matematycznego

- **Wahadło matematyczne** (masa punktowa, zawieszona na nieważkiej i nierozciągliwej nici).

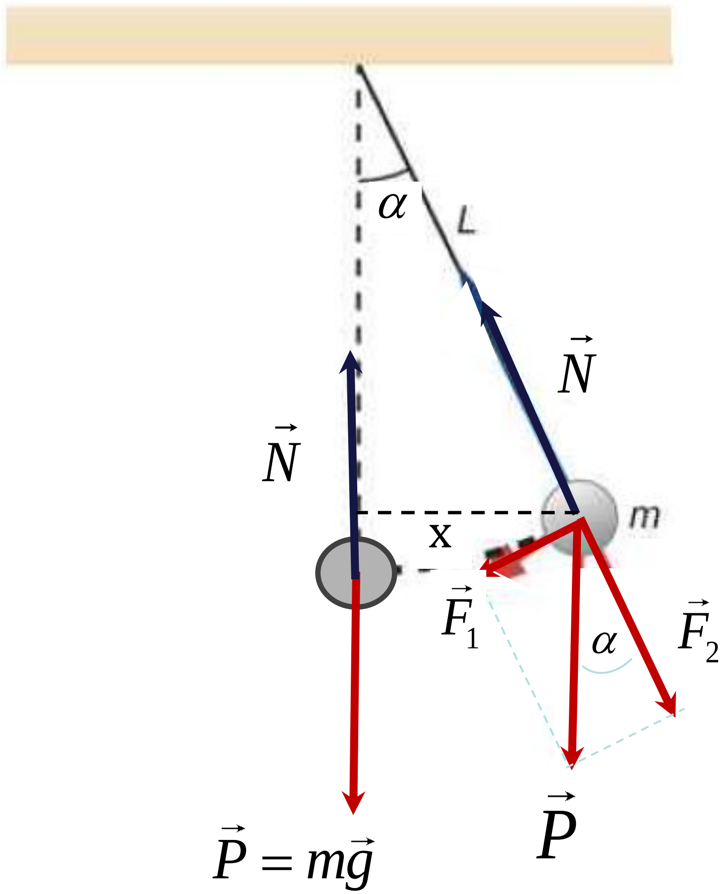
Wyznacz okres drgań wahadła matematycznego o długości $\boldsymbol{l}$ odchylonego od pionu o kąt $\alpha \leq 4$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



(*wyprowadzenie zależności na tablicy)

Przykład 3 - wahadło matematyczne- rozwiazanie:



Dane:

l, $\alpha \leq 4^\circ$

Szukane:

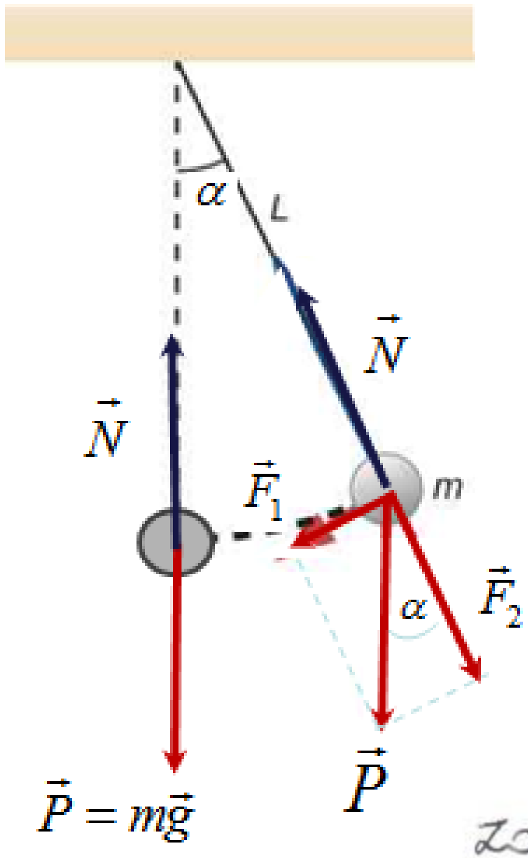
$T_{mat} = ?$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Downarrow$$

(1) $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ częstość kołowa?

Przykład 3 - wahadło matematyczne



Równanie ruchu: (2) $F_1 = -mg\sin\alpha$

(3) $ma = -mg\sin\alpha$

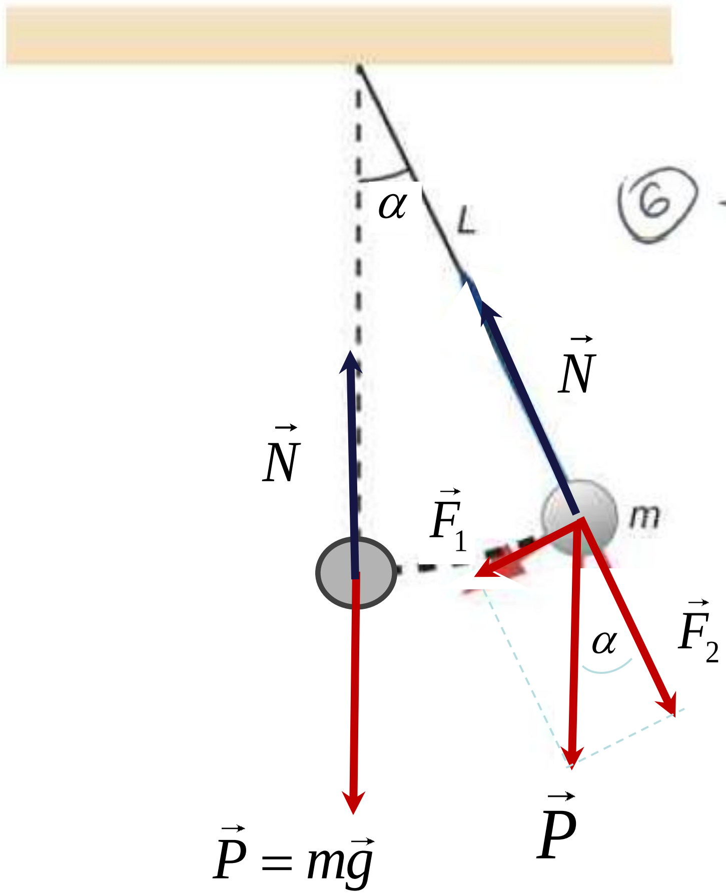
$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + mg\sin\alpha = 0 \quad \Big| : m$$

(4) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + g\sin\alpha = 0$,

z wz. (5) $\sin\alpha = \dfrac{x}{l}$,

zatem: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{g}{l}x = 0$

$\Rightarrow \omega^2 = \dfrac{g}{l} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}}$ (6)



6 → 1 : Otrzymujemy ostatecznie :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

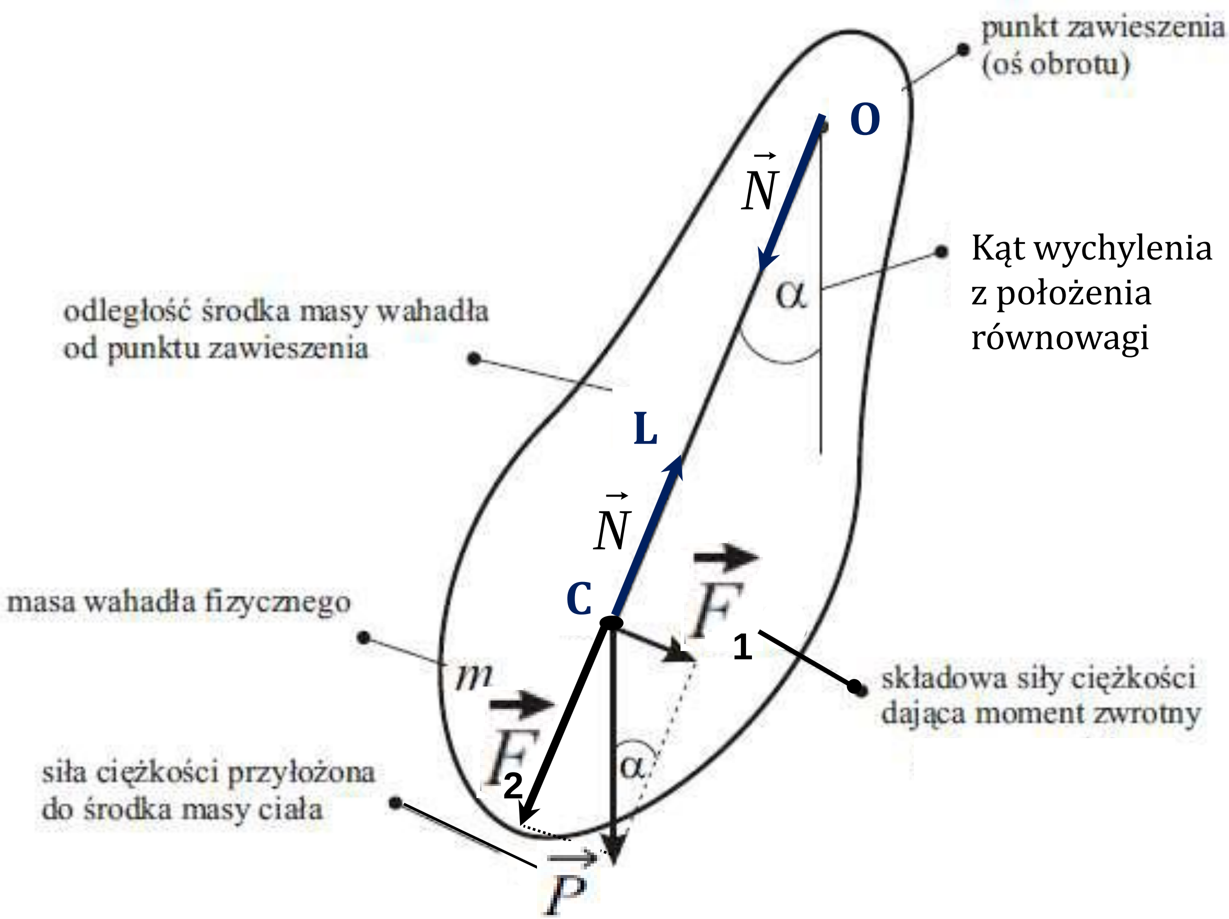
- Okres drgań wahadła matematycznego zależy od jego długości i przyspieszenia grawitacyjnego.
- Na okres nie mają wpływu ani masa ciężarka, ani amplituda maksymalnego kąta w zakresie do około 15°. Dlatego też zegary mechaniczne wykorzystujące wahadło mogą precyzyjnie odmierzać czas.

Przykład 4. - okres drgań wahadła fizycznego

Wahadło fizyczne: bryła sztywna, która pod działaniem własnego ciężaru waha się dookoła osi poziomej, nie przechodzącej przez środek ciężkości ciała.

Wyznacz okres drgań dla wahadła fizycznego odchylonego od pionu o kąt α ≤4. Odległość środka masy wahadła od punktu zawieszenia wynosi L, a jego moment bezwładności I (względem puntu zawieszenia).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$



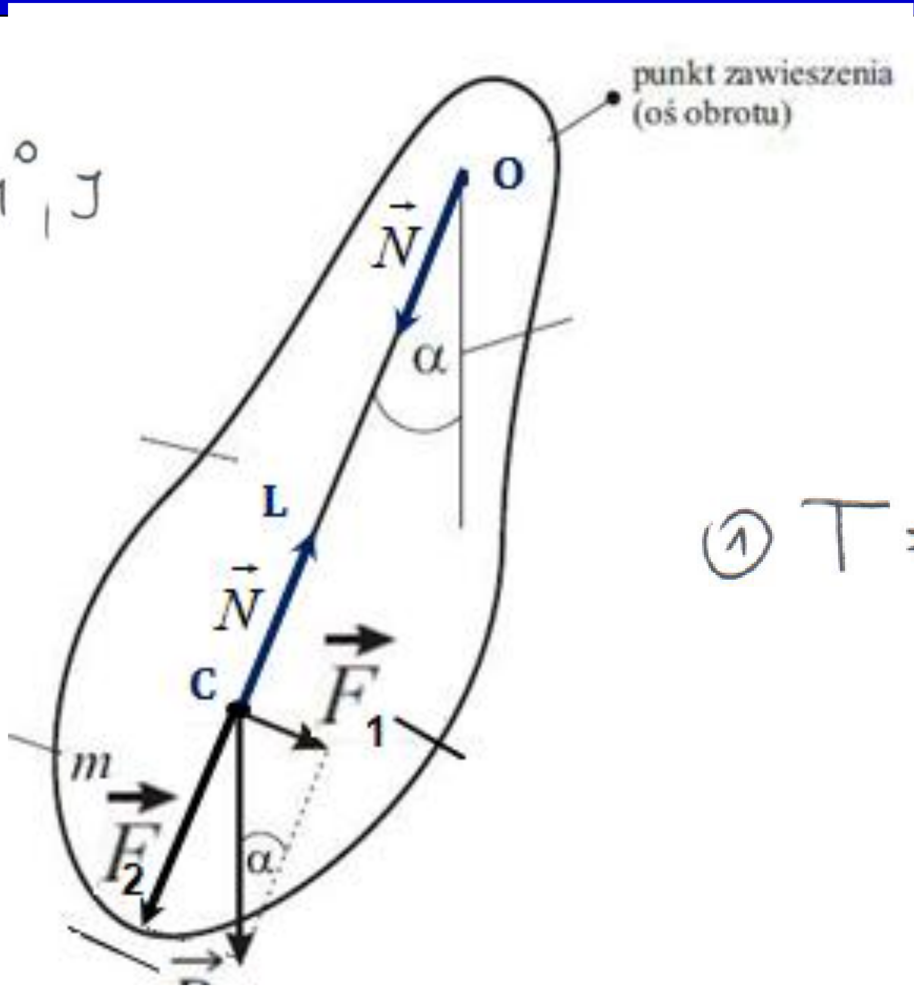
(*wyprowadzenie zależności na tablicy!)

Przykład 4. - drgania wahadła fizycznego

Dane:

L, $\alpha \leq 4^\circ$, J

Zał.: $\sin\alpha \approx \alpha$



Szukane:

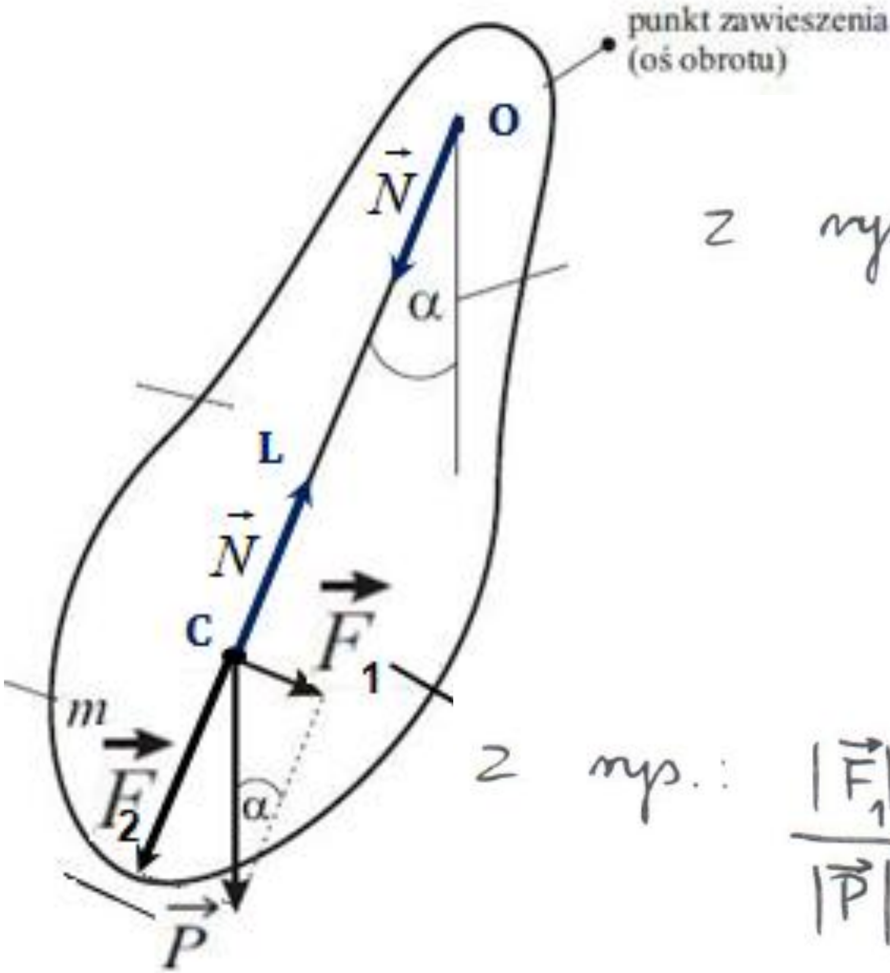
$T_{fiz} = ?$

① $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Równanie ruchu dla wahadła fizycznego:

② $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}$, gdzie ③ $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$

Przykład 4. - drgania wahadła fizycznego



z rys.: (4) w: $\vec{M} = \vec{L} \times \vec{F}_1$

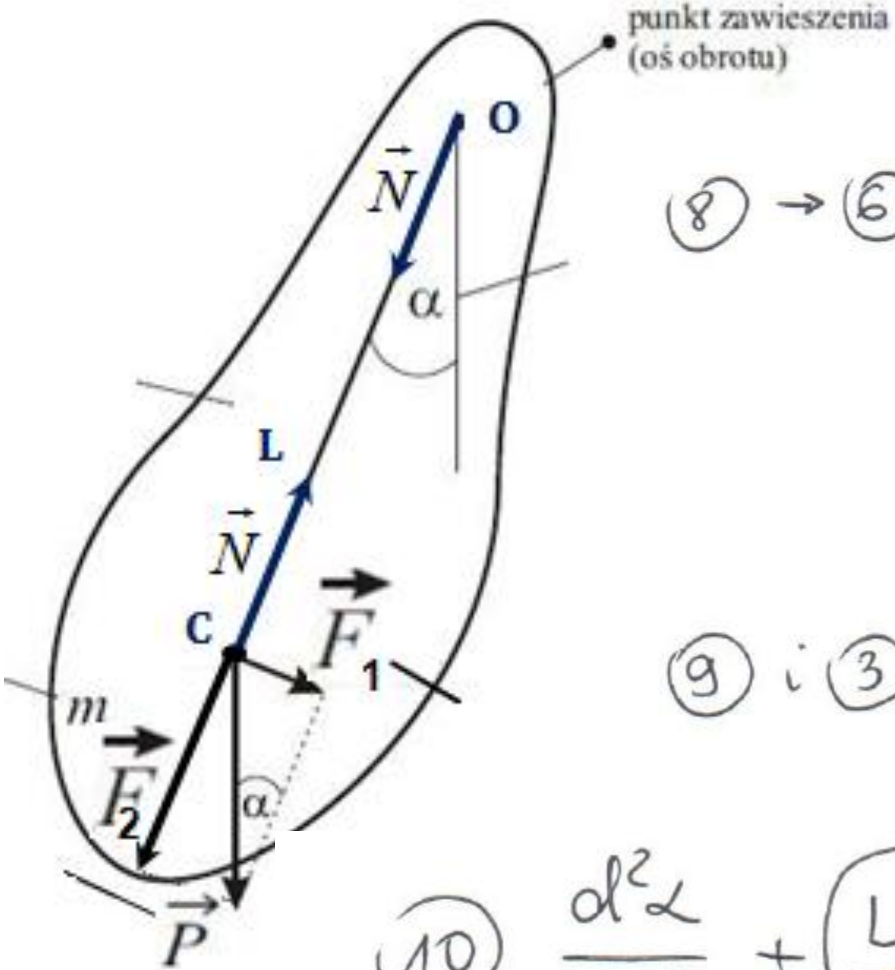
(5) s: $|\vec{M}| = |\vec{L}|\,|\vec{F}_1| \sin(\sphericalangle \vec{L}, \vec{F}_1)$

(6) $M = L \cdot F_1$, $\sin(\sphericalangle \vec{L}, \vec{F}_1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

z rys.: $\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{P}|} = \sin\alpha \Rightarrow$ (7) $F_1 = mg\sin\alpha$

ale (8) $F_1 = (-)\, mg\sin\alpha$

zwrot siły



$(8) \rightarrow (6):\quad M = -Lmg\sin\alpha \approx \boxed{-Lmg\alpha}$

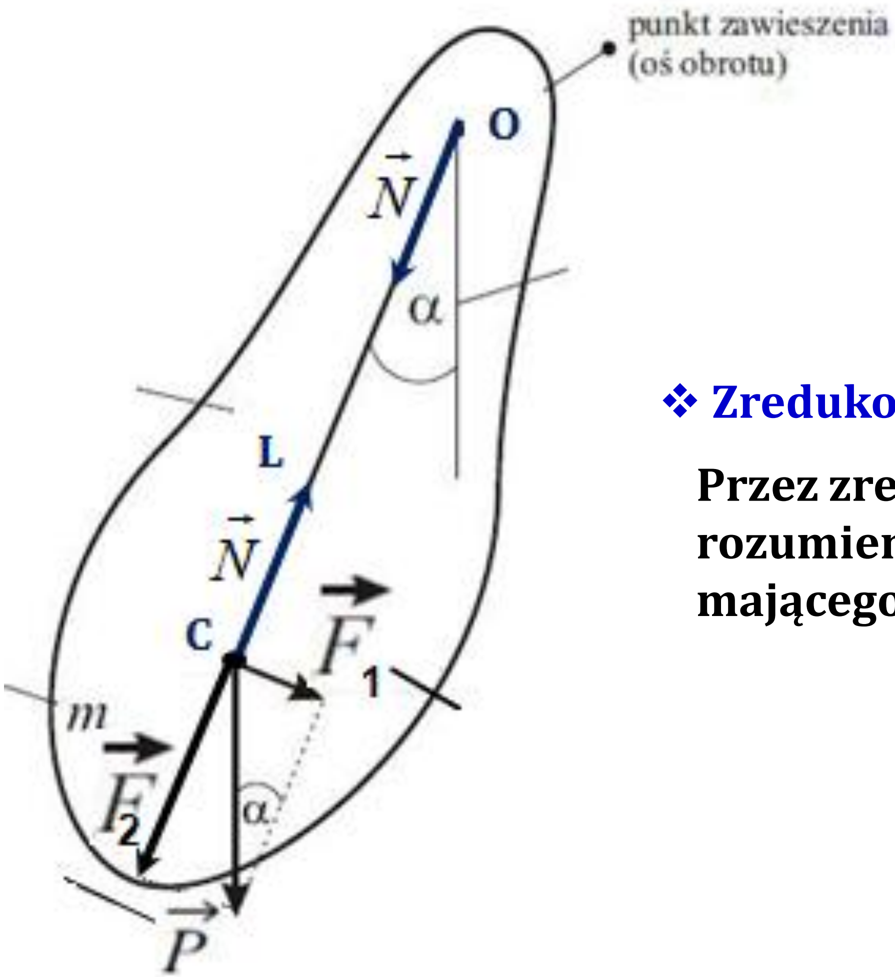
$(9):\quad M = -Lmg\alpha$

$(9)\ i\ (3) \rightarrow (2):\quad \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = -\dfrac{Lmg}{J}\alpha$

$$(10)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{Lmg}{J}\alpha = 0$$

$$\omega^2 = \frac{Lmg}{J} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{Lmg}{J}}}\quad (11)$$

Przykład 4. - drgania wahadła fizycznego



Podstawiając (11) do (1), ostatecznie okres drgań wahadła fizycznego:

$$\boxed{T_{fiz} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}}$$

❖ **Zredukowana długość wahadła l_{zr}**

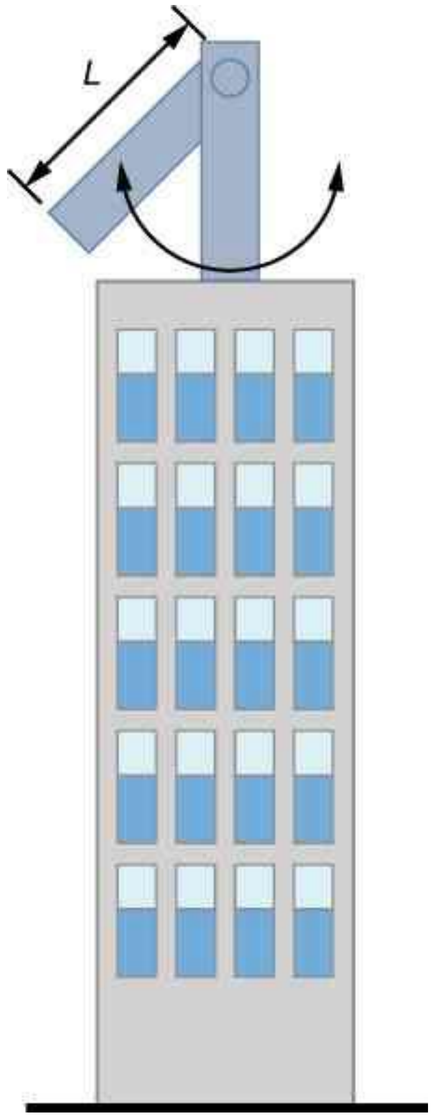
Przez zredukowaną długość wahadła fizycznego rozumiemy długość wahadła matematycznego, mającego taki sam okres drgań.

$$T_{mat} = T_{fiz}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{l_{zr}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

$$\boxed{l_{zr} = \frac{I}{mL}}$$

Przykład 5 – zastosowanie wahadła fizycznego.



W warunkach silnych podmuchów wiatru lub fali sejsmicznej konstrukcja drapacza chmur może oscylować z A= 2m oraz częstotliwością f=20 Hz.

Zainstalowanie wahadła fizycznego na szczycie wieżowca powoduje wygaszenie efektu kołysania konstrukcji.

Jaka powinna być długość ramienia wahadła?

Wahadło ma kształt długiego pręta o **m = 100 T**, zbudowane jest z materiałów o stałej gęstości, z punktem obrotu znajdującym się na końcu pręta (rys.)., a jego **częstotliwość f = 0,50 Hz**.

Rys. źródło: Fizyka dla szkół wyższych Tom I, Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs

Jaka powinna być długość ramienia wahadła?

L=?

Okres drgań wahadła fizycznego wynosi: $$T_{fiz} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} \qquad (1)$$

Z twierdzenia Steinera **:** $$I = I_0 + Md^2 \qquad (2)$$

Ponieważ $$I_0 = \tfrac{1}{12} ML^2, \qquad (3)$$

a $$d = \frac{1}{2} L \qquad (4)$$

stąd $$I = \frac{1}{3} ML^2 \qquad (5)$$

Podstawiając ***I*** do wyrażenia (1): $$T_{fiz} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3}\frac{L}{g}} \qquad (6)$$

P.5. Rozwiązanie

Jaka powinna być długość ramienia wahadła?

Z wyrażenia (6) wyznaczymy ***L***:

$$L = 3g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{3g}{4\pi^2 f^2} \quad \text{(m)}$$

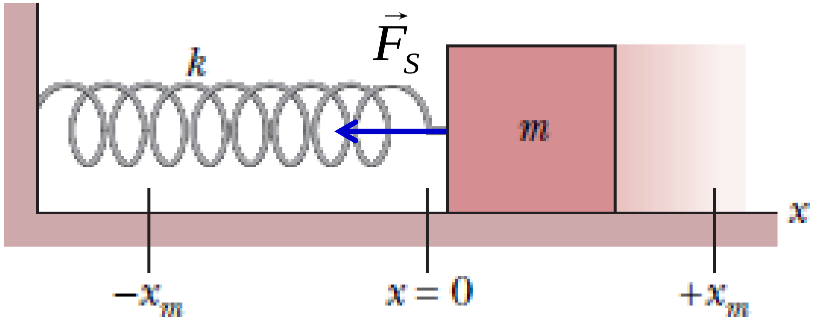
Otrzymujemy długość równą:

$$L = 2{,}9849\ m$$

Znaczenie:

Jest wiele sposobów na redukcję oscylacji wieżowca, m.in. dobór odpowiedniego kształtu budynku, zastosowanie kilku wahadeł fizycznych lub masowego tłumika drgań.

ENERGIA RUCHU HARMONICZNEGO PROSTEGO



Rys. **Liniowy oscylator harmoniczny.**
Klocek porusza się bez tarcia po powierzchni.
źródło: -Halliday,Resnick,Walker „Fundamentals of Physics”

Energia oscylatora zmienia się z energii potencjalnej w kinetyczną i z powrotem.

W przypadku jednowymiarowym:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Obliczymy **energię potencjalną** sprężyny korzystając z zależności $F_s = -kx$
i z ogólnego wzoru na pracę wykonywaną przez siłę zmienną (siłę sprężystości).

$$W = \int F dx = \int_x^0 (-kx) dx = k\int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2$$

❖ENERGIA POTENCJALNA

masa drgającego ciała

współczynnik proporcjonalności między siłą a wychyleniem

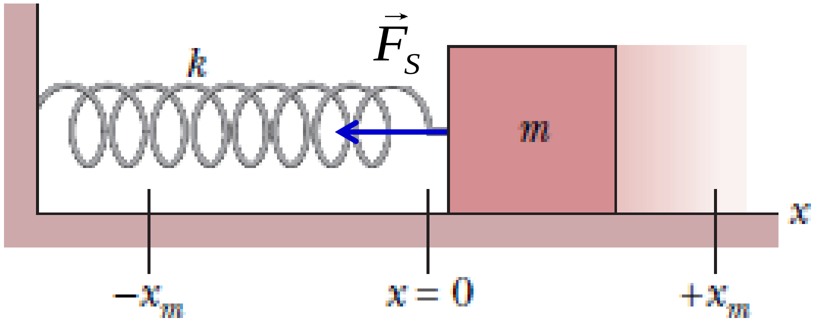
częstość (kołowa) drgań

amplituda drgań

ENERGIA POTENCJALNA drgań dla siły F =-kx

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi)$$

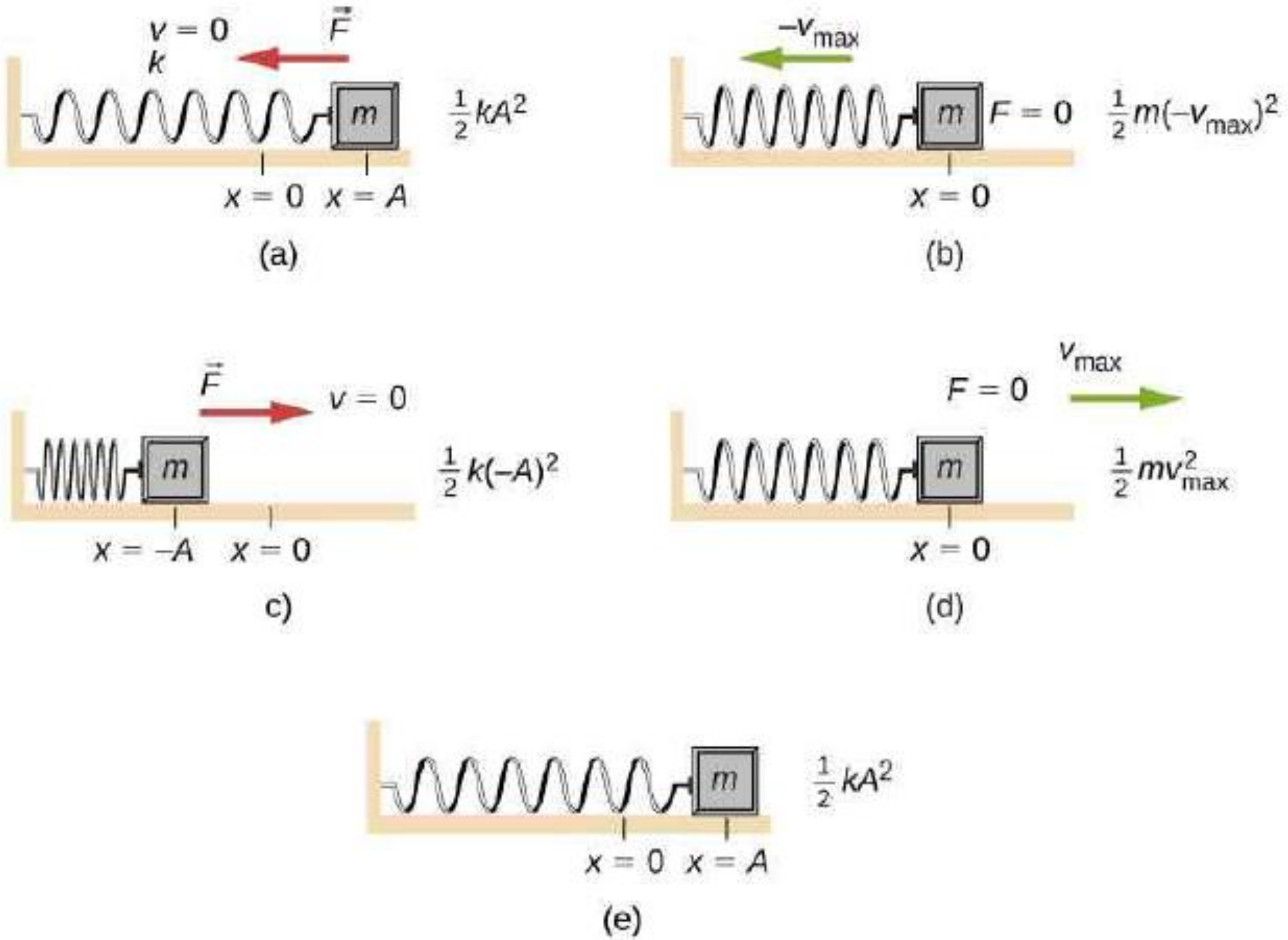
wychylenie z położenia równowagi



Rys. **Liniowy oscylator harmoniczny. Klocek porusza się bez tarcia po powierzchni.**

❖ ENERGIA KINETYCZNA DRGAŃ HARMONICZNYCH

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$



Rys. Oscylujący klocek przymocowany do sprężyny. Przy braku tłumienia (bez tarcia) w ruchu harmonicznym energia przechodzi z jednej formy w drugą w czasie. Całkowita energia pozostaje stała.

(rys. źródło: „Fizyka dla szkół wyższych ", Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs)

ENERGIA CAŁKOWITA W RUCHU HARMONICZNYM

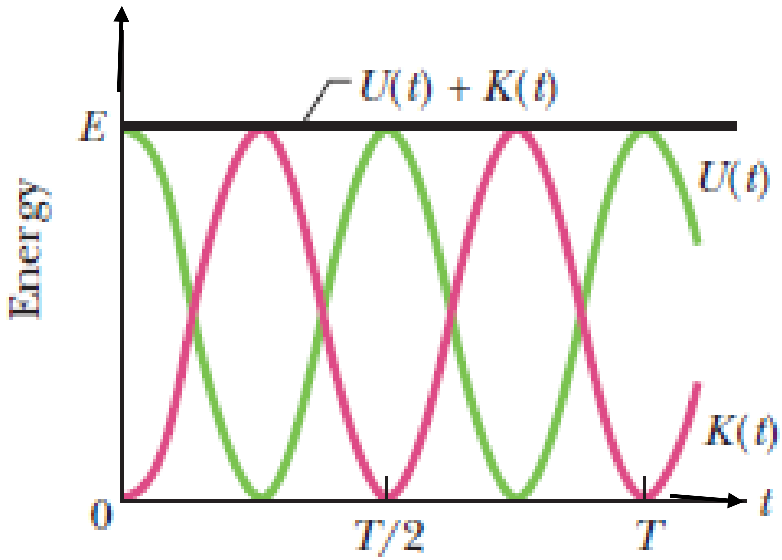
Korzystając z wyrażeń na ***x*(*t*)** i ***v*(*t*)**, uwzględniając $k = m\omega^2$, przy założeniu, że nie ma tarcia ani innych sił oporu:

$$E_C = E_K + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\left[\sin^2(\omega t + \phi_0) + \cos^2(\omega t + \phi_0)\right] = \frac{m\omega^2 A^2}{2}$$

Energia całkowita drgającego ciała:

$$E_C = \frac{1}{2} kA^2$$

E_c= const.



Rys. źródło: -Halliday, Resnick,Walker „Fundamentals of Physics".

Skoro tak, to prędkość klocka w ruchu harmonicznym:

$$|v| = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}.$$

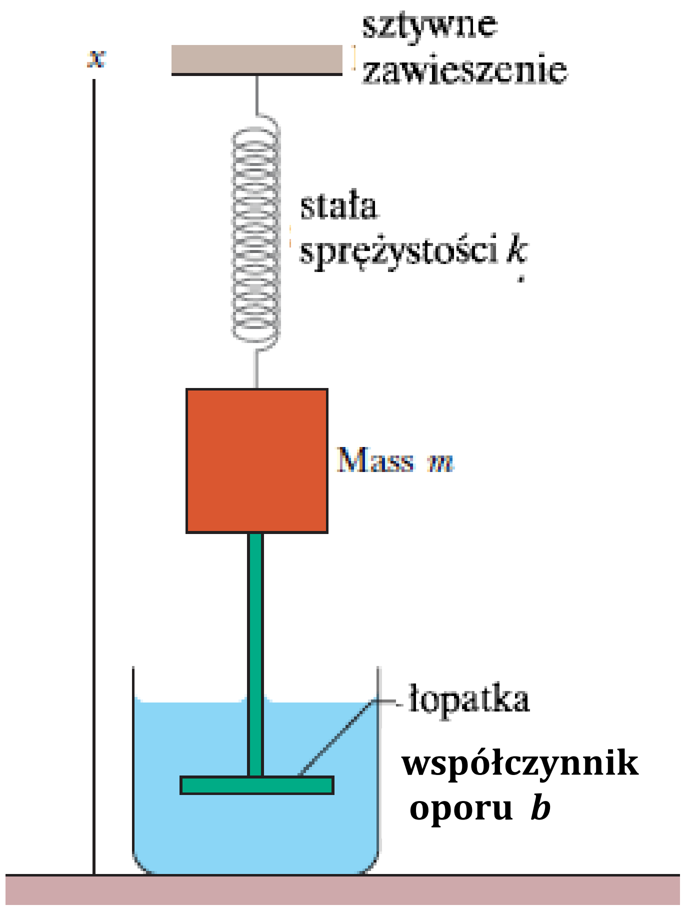
Wnioski:

- Całkowita energia mechaniczna oscylatora jest stała .
- Ze sprężystością związana jest energia potencjalna układu, a z bezwładnością –jego energia kinetyczna.

DRGANIA TŁUMIONE

Jeśli chcemy huśtać się na huśtawce, musimy wykonywać odpowiednie ruchy ciała w celu kompensacji strat energii wynikających z obecności sił oporu ośrodka i sił tarcia. (Zdj. źródło: źródło: „Fizyka dla szkół wyższych ”, Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs)

DRGANIA TŁUMIONE



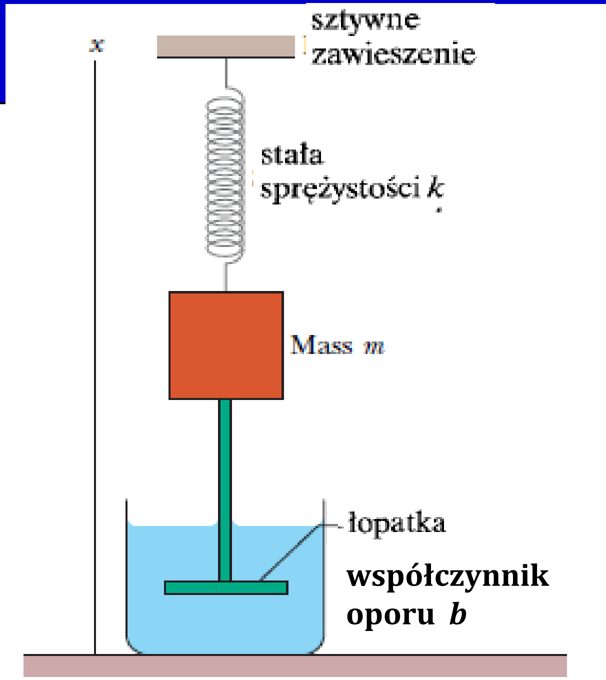
Rys. Prosty oscylator tłumiony.
źródło: -Halliday,Resnick,Walker „Fundamentals of Physics”.

Jeżeli ruch oscylatora (rys.) słabnie na skutek działania sił zewnętrznych, to taki oscylator nazywamy **oscylatorem tłumionym,** a jego drgania **tłumionymi**.

Siła tłumiąca (siła oporu) ma zwrot przeciwny do prędkości układu i jest : $F_{op} \sim v$.

$$F_t = -b\frac{dx}{dt}$$

gdzie: b- *współczynnik oporu ośrodka .*



Uwzględniając siłę tłumiącą ośrodka i działającą na klocek siłę sprężystości sprężyny.

Zakładając, że siła ciężkości klocka jest znikomo mała w porównaniu z siłami F_s i F_o .

- Wówczas II zasadę dynamiki Newtona dla składowej wzdłuż osi x ($F_x=ma_x$), zapisujemy:

Równanie różniczkowe drgań tłumionych

$$ma = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

Po przekształceniach:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{2b}{2m}}_{\beta}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_o^2}x = 0$$

lub

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o{}^2 x = 0$$

Rozwiązaniem równania jest funkcja:

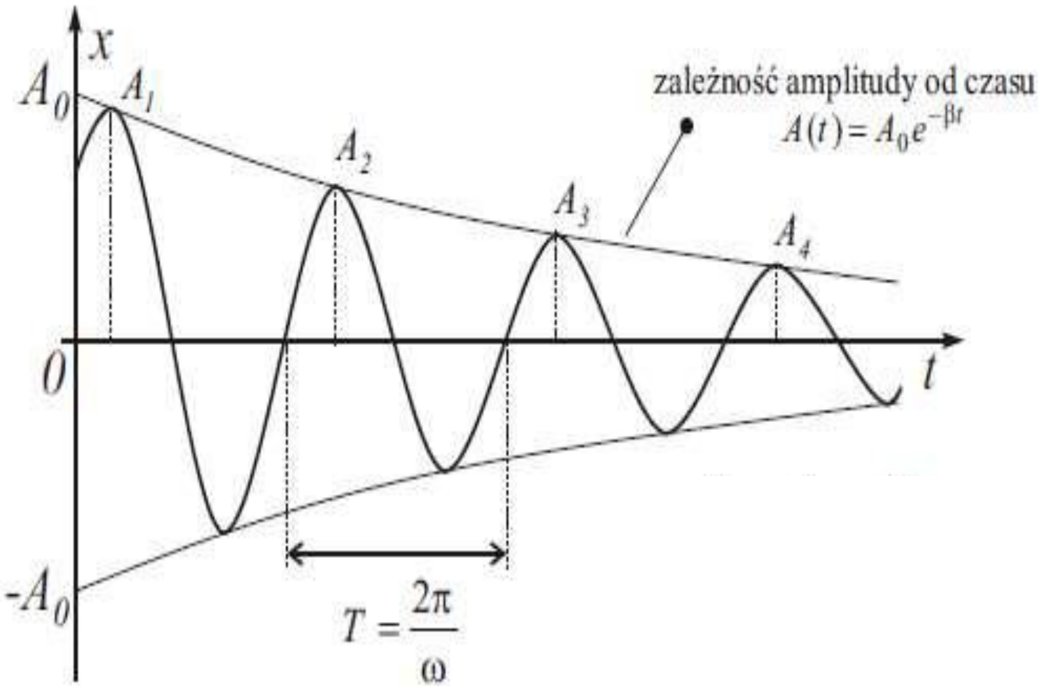
$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

DRGANIA TŁUMIONE

gdzie: - wielkość tłumienia określa **współczynnik tłumienia** $\beta = b/2m$,

- **częstość** (lub pulsacja) **drgań tłumionych** $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

- częstość drgań nietłumionych czyli ***częstość własna*** $\omega_0 = \sqrt{k/m}$



Zależność przemieszczenia od czasu w ruchu harmonicznym tłumionym.
Linie przerywane ilustrują wykładnicze tłumienie amplitudy tego ruchu.

<u>Wnioski:</u>

1) opór zmniejsza zarówno **amplitudę z upływem czasu:**

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

2) oraz **częstość drgań**,

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2} < \omega_0$$

3) zwiększa okres

❖ ***Logarytmiczny dekrement tłumienia:***

$$\delta = \ln \frac{A_{(t)}}{A_{(t+T)}} = \beta T$$

DRGANIA TŁUMIONE

- Oznaczmy przez τ **odstęp czasu**, w ciągu którego amplituda drgań zmniejszy się e- krotnie.

Wtedy: $\beta\tau = 1$ lub $\beta = 1/\tau$

czyli: współczynnik tłumienia β jest wielkością fizyczną równą odwrotności odstępu czasu τ w ciągu którego amplituda zmniejsza się e -razy. Czas τ nazywamy **czasem relaksacji**.

- **Energia oscylatora tłumionego nie jest stała i maleje z czasem:**

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}kx^2e^{-bt/m}}$$

Energia-podobnie jak amplituda- maleje wykładniczo z czasem.

Możesz wprawić w wibracje struny fortepianowe, działając na nie falą dźwiękową swojego głosu.
(Zdj. źródło: źródło: „Fizyka dla szkół wyższych ”, Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs)

DRGANIA WYMUSZONE (*oscylatora harmonicznego)*

- W ruchu harmonicznym tłumionym amplituda, a co za tym idzie i energia drgań maleje z czasem do zera. Jeżeli chcemy podtrzymać drgania to musimy działać odpowiednią siłą zewnętrzną ***F*(*t*)** przyłożoną do oscylatora. Siłę taką nazywamy siłą wymuszającą.

W przypadku drgań harmonicznych **zewnętrzna siła wymuszająca** jest siłą okresowo zmienną postaci:

$$F_w = F_0 \cos(\omega_w \cdot t)$$

Równanie ruchu uwzględniające zarówno siłę wymuszającą, jak i tłumiącą drgania zapisujemy w postaci:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_w \cdot t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_w \cdot t)$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Fot. J. H. Fragonard: "Huśtawka"
(" *Les hasards heureux de l'escarpolette* " , 1767)

❖ **Rozwiązanie równania dla drgań wymuszonych**:

$$x = A_0 \cos(\omega_w t + \varphi)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_w^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_w^2}}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{2\beta\omega_w}{\omega_0^2 - \omega_w^2}\right)$$

WNIOSKI:

▪ Układ drga z częstością siły wymuszającej, a nie z częstością własną i jest ruchem nietłumionym (amplituda nie maleje z upływem czasu).

▪ Amplituda drgań zależy zarówno od współczynnika tłumienia, jak i od różnicy pomiędzy częstością drgań własnych układu i częstością siły wymuszającej.

❑ REZONANS- KONSEKWENCJE DRGAŃ WYMUSZONYCH

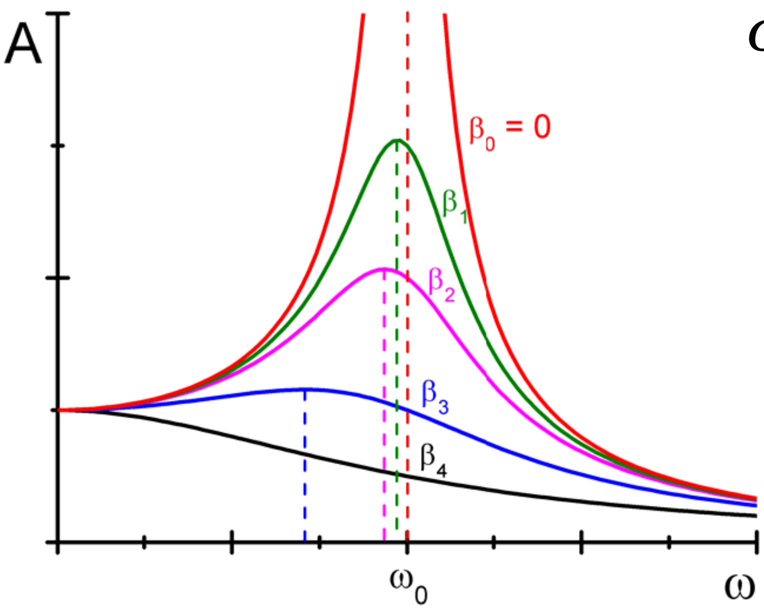
Można dobrać taką częstość siły wymuszającej, aby amplituda drgań tego ciała była maksymalna., zjawisko to nazywamy **REZONANSEM.**

Amplituda drgań wymuszonych będzie maksymalna wtedy, gdy:

$$\frac{dA_0}{d\omega_w} = 0$$

$$rozwiązanie: \quad \omega_w = 0$$

$$oraz \quad \omega_w = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



Kiedy brak jest tłumienia ($b = 0$), a częstość rezonansowa równa jest częstości drgań własnych układu $\omega_w = \omega_0$

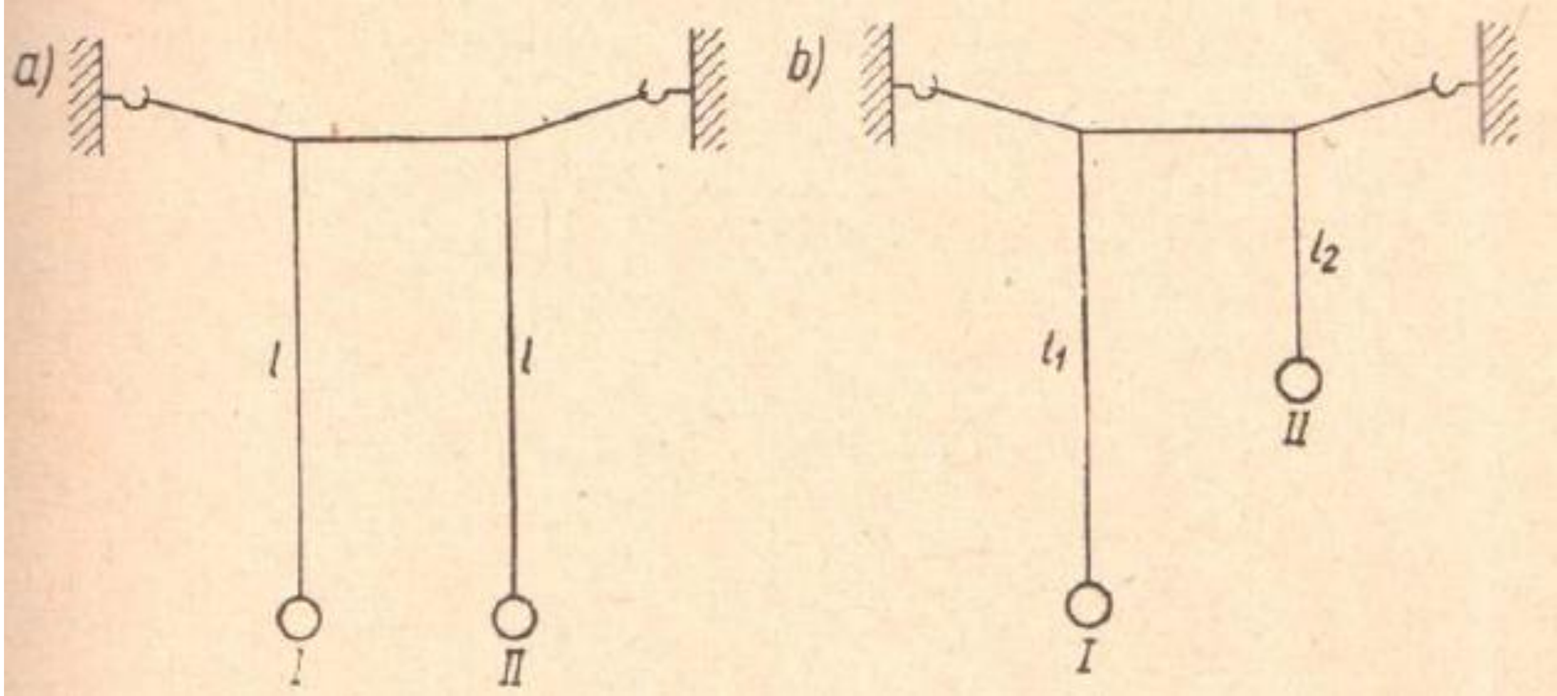
, a amplituda dąży do nieskończoności!

WARUNEK REZONANSU:

$$\boxed{\omega_w = \omega_0}$$

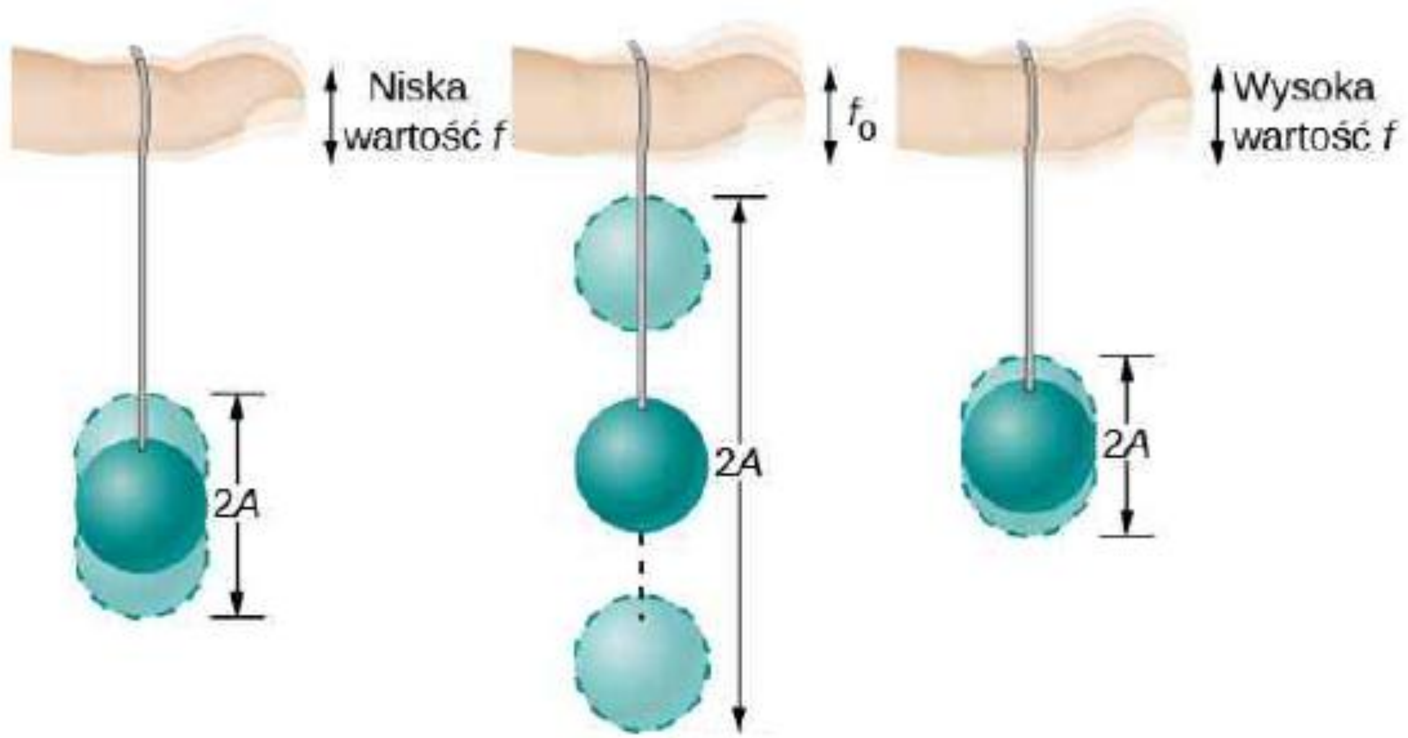
Krzywe zależności amplitudy drgań od częstości siły wymuszającej dla kilku wartości współczynników tłumienia β ($\beta_0<\beta_1<\beta_2<\beta_3<\beta_4$) .

❑ REZONANS MECHANICZNY



Rys. (a) Na poziomej nici zawieszamy dwa wahadła o jednakowej długości i jedno z nich wprawiamy w ruch wahadłowy. (b) Jedno z wahadeł zostaje skrócone.

❑ REZONANS - KONSEKWENCJE DRGAŃ WYMUSZONYCH



Rys. Kulka na gumce drga w odpowiedzi na ruchy palca, na którym ją zawieszono. Jeśli palec porusza się z częstotliwością taką jak częstotliwość drgań własnych f_0 kulki, to uzyskujemy rezonans przejawiający się gwałtownym wzrostem amplitudy drgań kulki.
Przy wyższych i niższych częstotliwościach ruchu palca energia jest przekazywana kulce mniej efektywnie, przez co kulka ma mniejszą amplitudę drgań.

Fot. Most Tacoma Narrows w USA
http://www.atlasobscura.com/places

W 1940 r. most w Tacoma w stanie Waszyngton uległ zniszczeniu.
Przyczyną był wiejący od oceanu zmienny wiatr (do 67 km/h), który wprowadził most w oscylacje przy częstotliwości rezonansowej.
Gdy kable nośne uległy zerwaniu, współczynnik tłumienia spadł, co spowodowało jeszcze większą amplitudę oscylacji (A= 8,5m, przy skręcaniu do 45). Co doprowadziło do zawalenia całej konstrukcji.

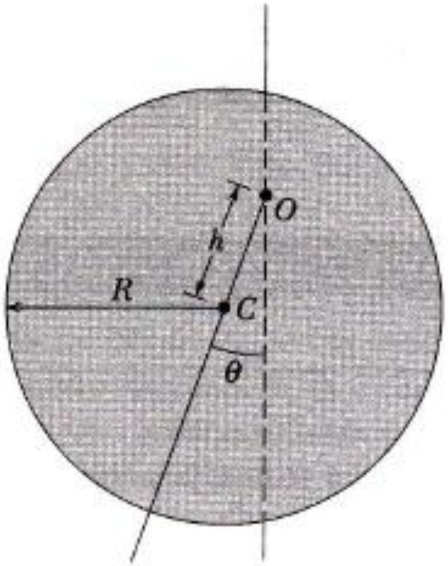
Od tamtej pory pomosty usztywnia się kratownicami i nie projektuje się tak wąskich konstrukcji.

PODSUMOWANIE DRGAŃ

- **Oscylator harmoniczny: małe drgania (mała amplituda drgań) oraz małe tłumienia**
- **Energia jest zachowana jeśli nie ma tłumienia**
- **Tłumienie powoduje spadek amplitudy w funkcji czasu i straty energii**
- **Oscylator wymuszony charakteryzuje się amplitudą zależną od częstości wymuszenia i może wykazywać rezonansowy wzrost amplitudy**

Zadanie domowe (dla wszystkich:)

Wahadło fizyczne, którym jest krążek o promieniu R =12,5 cm, zawieszono w punkcie odległym o ***h*** od środka ciężkości C (rys.), ma okres drgań T=0,871s, gdy h=R/2.
Oblicz przyspieszenie ziemskie w miejscu, w którym porusza się wahadło.



Odp.: $g = \dfrac{6\pi^2 R}{T^2}$ $, g = 9{,}76\,\frac{m}{s^2}$

Dziękuję za uwagę !