Wykład 2.

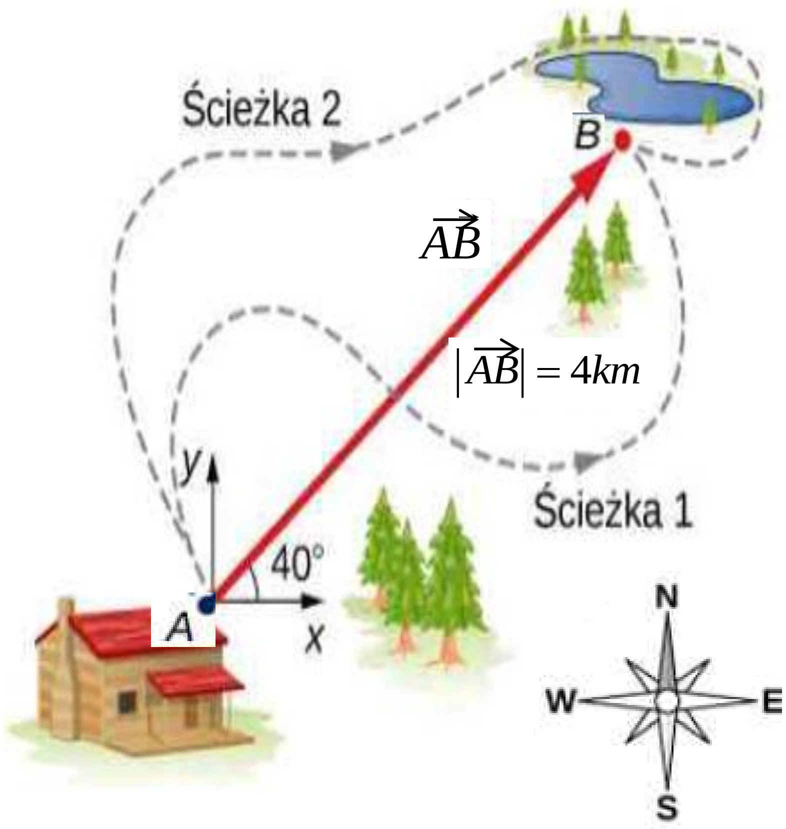
2. KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

- ❑ **Ruch jednowymiarowy**
- ❑ **Ruch na płaszczyźnie i w przestrzeni**

Cel dydaktyczny:

- Położenie, przemieszczenie, prędkość średnia
- Prędkość chwilowa i szybkość średnia
- Przyspieszenie średnie i chwilowe
- Ruch ze stałym przyspieszeniem
- Spadek swobodny, rzut pionowy
- Rzut ukośny

KLUCZOWE POJĘCIA :



Rys. Wektor przemieszczenia podczas wyprawy na ryby.
Rys. źródło: „*Fizyka dla szkół wyższych* S. Ling, , J.Sanny, W. Moebs

- **Ruch mechaniczny** – zmiana wzajemnego położenia ciała (punktu materialnego) w przestrzeni (lub jednych ich części względem drugich) pod wpływem czasu.

- **Punkt materialny** – punkt geometryczny, w którym skupiona jest pewna masa, a którego rozmiary i kształty możemy w danym zagadnieniu pominąć.

- **Układ odniesienia** – nieruchome w czasie obserwacji ciało lub zbiór ciał, względem którego opisujemy ruch innych ciała w przestrzeni.

- **Układ współrzędnych** – związany z danym układem odniesienia zespół wzajemnie prostopadłych osi umożliwiający jednoznaczne określenie położenia punktu w przestrzeni.

- **Równania ruchu** – opisują zmiany położenia ciała w przestrzeni w funkcji czasu.

- **Trajektoria ruchu** – krzywa w przestrzeni, opisująca zmianę położenia ciała.

Klasyfikacja ruchów:

A. Ze względu na **tor (trajektorię) ruchu**:

- prostoliniowe (postępowe);
- krzywoliniowe (w tym: po okręgu);

B. Ze względu na **zależność położenia od czasu**:

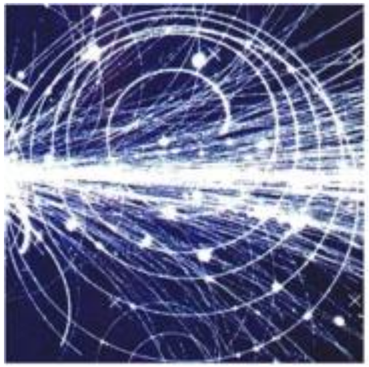
- jednostajne;
- jednostajnie zmienne (przyspieszone lub opóźnione);
- pozostałe (np. niejednostajnie zmienny itp.).

❑ Ruch prostoliniowy

- Położenie i przemieszczenie
- Prędkość średnia i chwilowa
- Przyspieszenie
- Spadek swobodny

❑ Ruch w dwóch i w trzech wymiarach

- Rzut ukośny
- Ruch jednostajny po okręgu



Ruch cząstek emitowanych w zderzeniach jąder atomowych, trwał ułamki milionowych części sekundy. *(CERN, Rap.Ann.1986)*

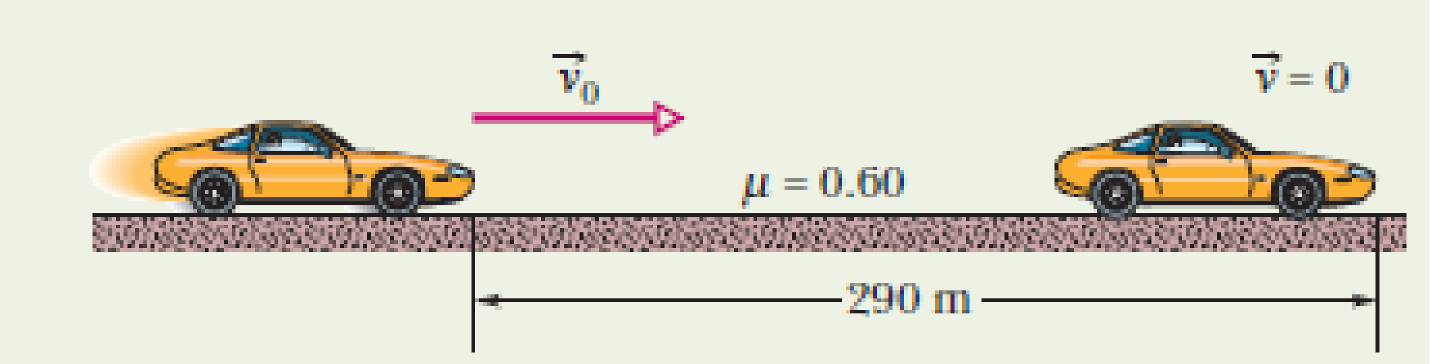
❑ RUCH PROSTOLINIOWY - JEDNOWYMIAROWY

Założenia:

-ruch odbywa się tylko wzdłuż linii prostej (pionowej lub poziomej)

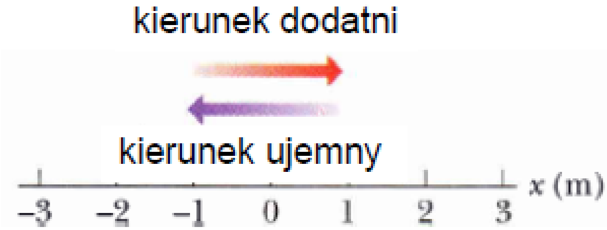
- interesuje nas sam ruch i jego zmiany a nie ich przyczyny

-poruszające się ciało traktujemy jak obiekt punktowy, czyli obdarzony masą lecz bez rozmiaru.

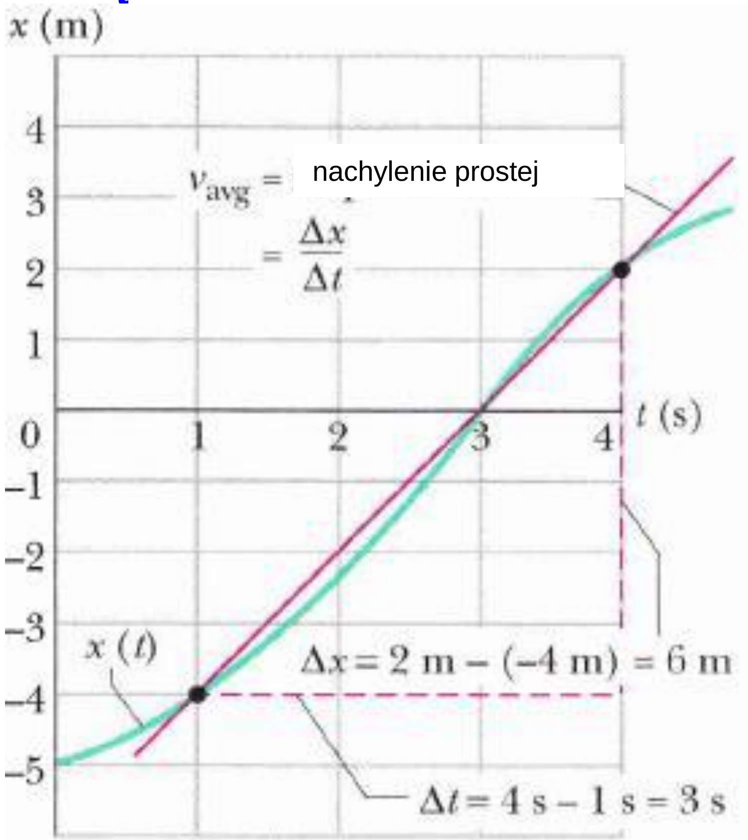


- **Przemieszczenie** - zmiana położenia pomiędzy danymi punktami

$$\Delta x_{t_1 \to t_2} = x(t_2) - x(t_1) \quad (m)$$



- **Prędkość średnia**



przemieszczenie

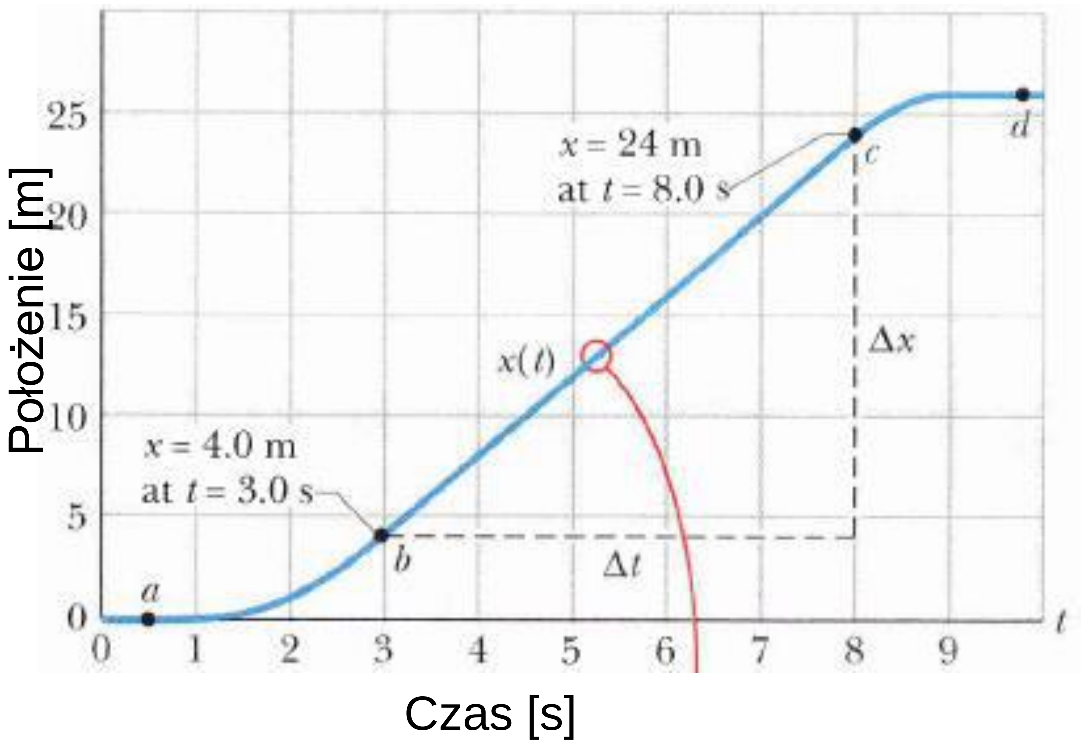
$$v_{śr\,t_1 \to t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

przedział czasu na przemieszczenie

❑RUCH JEDNOWYMIAROWY

- **Prędkość chwilowa-** prędkość poruszania się ciała w danej chwili,

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \left(\frac{m}{s}\right)$$



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\text{m} - 4\text{m}}{8\text{s} - 3\text{s}} = 4\text{m/s}$$

Przyspieszenie – określa jak zmienia się prędkość ciała.

- **Przyspieszenie średnie:**

$$a_{x\acute{s}r\, t_1 \to t_2} = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

- **Przyspieszenie chwilowe:**

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \left(\frac{m}{s^2}\right)$$

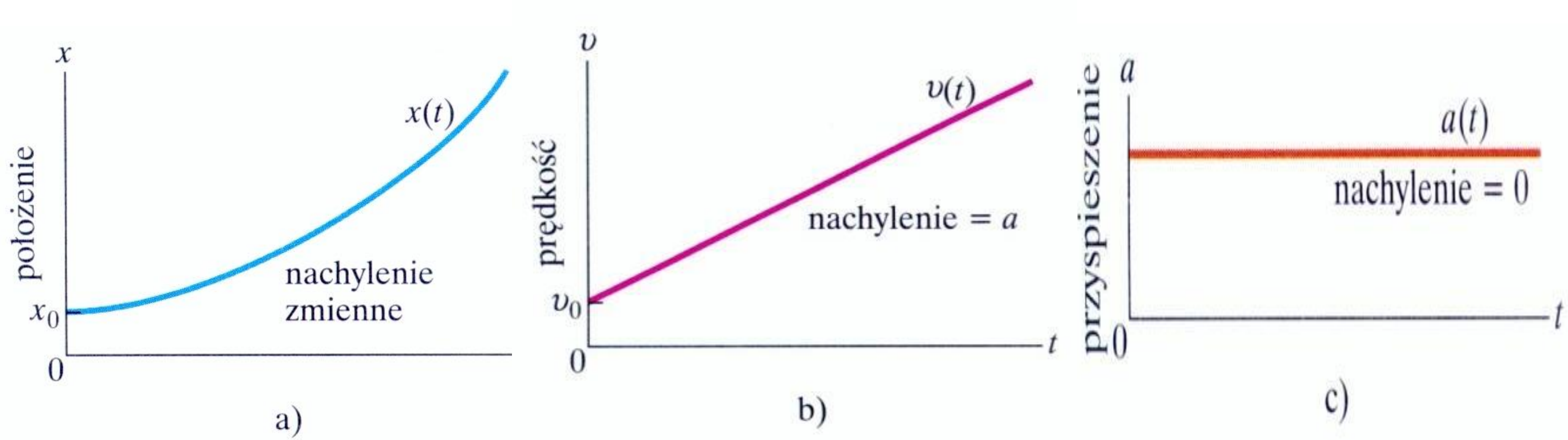
Przyspieszenie stałe (a=constant)

- Najczęściej będziemy się spotykać ze stałym przyspieszeniem (opóźnieniem).
- Gdy przyspieszenie chwilowe i średnie są równe, można zapisać:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}_{śr}\right| = \frac{v_k - v_0}{t_k - t_0} \qquad ,$$

gdzie: v_0 *oznaczaprędkoć wchwili począoczątkowej* $t_0 = 0$

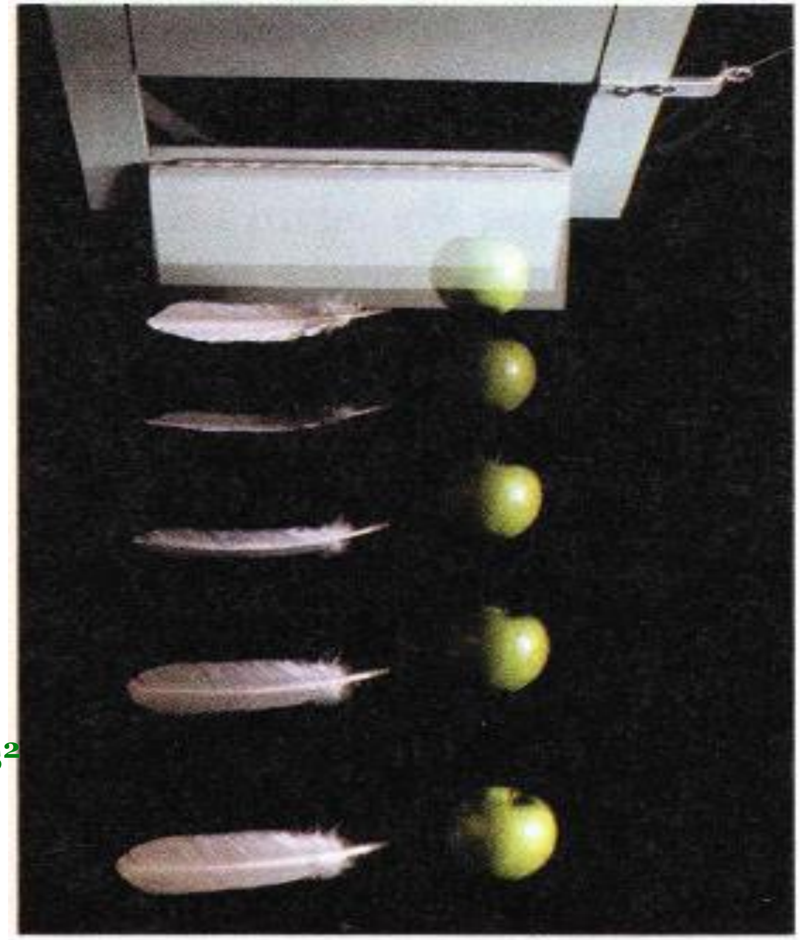
Przekształcając powyższe, mamy : $v(t) = v_o + at$



Rys. 12 *a) Położenie cząstki poruszającej się ze stałym przyspieszeniem. b) Prędkość cząstki w ruchu przyspieszonym. c) Przyspieszenie cząstki w ruchu przyspieszonym jest stałe.* *Źródło:* D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, "Podstawy fizyki - tom I", PWN, Warszawa 2005r.

▪ Spadek swobodny (rzut pionowy)

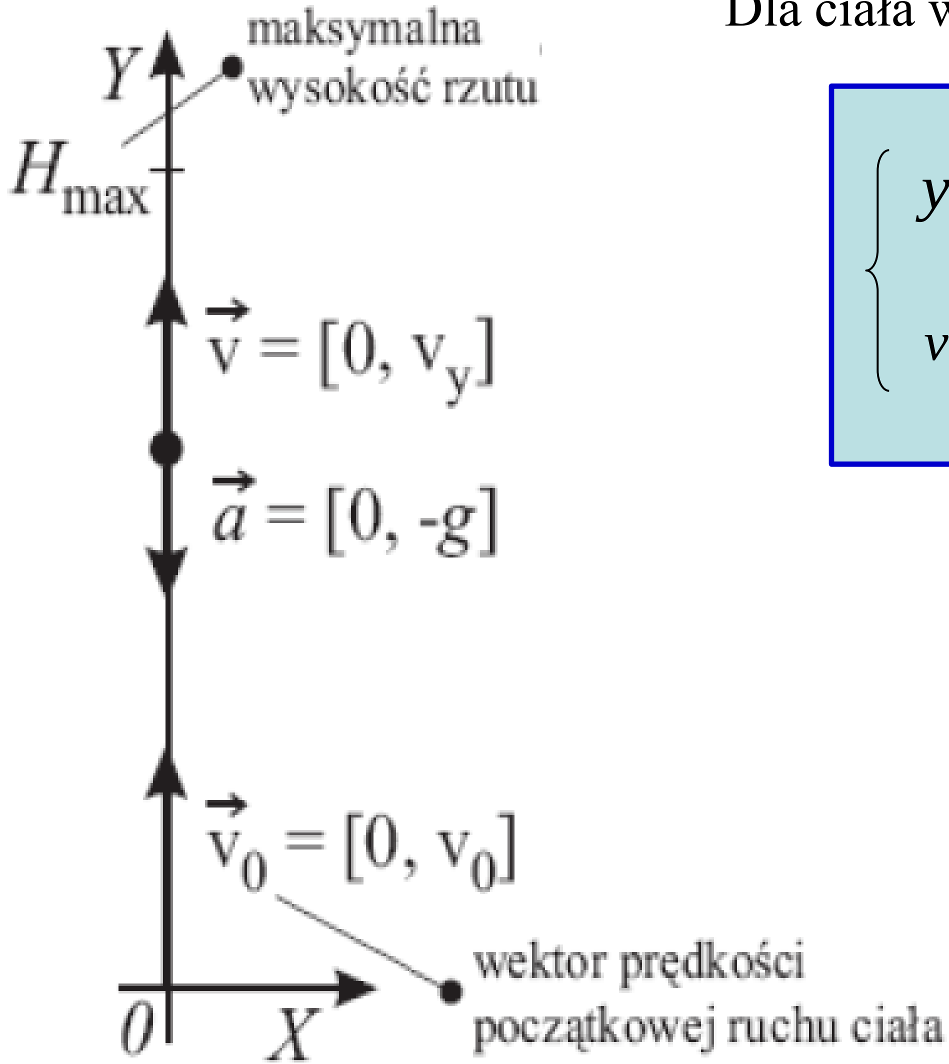
Gdy rzucimy ciało w górę lub w dół i w jakiś sposób wyeliminujemy wpływ powietrza na jego ruch, to podczas wznoszenia jak i opadania ciało porusza się z przyspieszeniem, które nazywamy **przyspieszeniem ziemskim g (m/s^2).**



Rys. *źródło:* D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, "Podstawy fizyki , tom I".

- Wartość **g** zmienia się nieznacznie w zależności od szerokości geograficznej i wysokości nad poziomem morza.
- W zadaniach będziemy używać **wartości g=9,81 m/s^2**
- W PRÓŻNI **g** **n**ie zależy ono od własności przedmiotu (masa, kształt, itd.)

RÓWNANIA RUCHU



Dla ciała wyrzuconego z prędkością v_0, :

$$\begin{cases} y(t) = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = v_0 - gt \end{cases}$$

$$t_k = \frac{2v_0}{g}$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Tablica- wyprowadzenie wzorów

▪ RZUT PIONOWY W GÓRĘ- wyprowadzenie wzorów

Dla $t = t_w$:

$$\begin{cases} H_{max} = y(t_w) & (1) \\ v(t_w) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{max} = v_{oy} \cdot t_w - \dfrac{g t_w^2}{2} & (3) \\ v_{oy} - g \cdot t_w = 0 \Rightarrow t_w = \dfrac{v_{oy}}{g} & (4) \end{cases}$$

(4) → (3) :

(5) $$H_{max} = \frac{2 \cdot v_{oy}^2}{2 \cdot g} - \frac{v_{oy}^2}{2g}$$

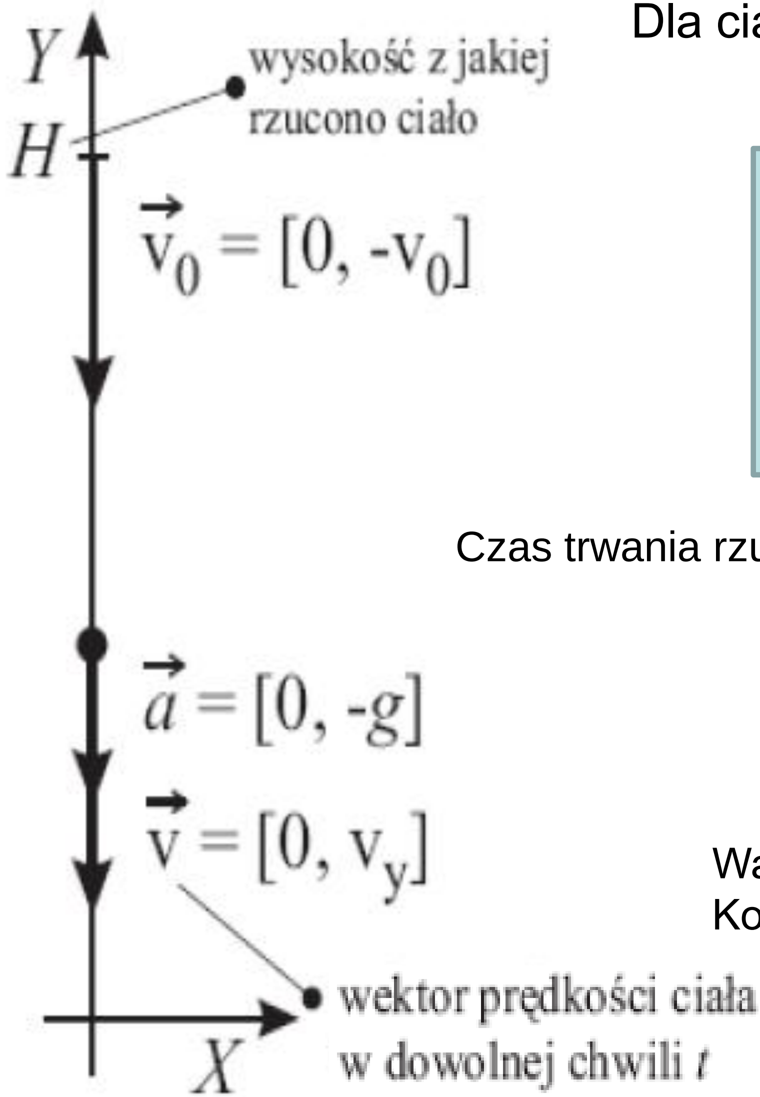
(6) $$\boxed{H_{max} = \frac{v_{oy}^2}{2g}}$$

(7) $$t_c = t_w + t_{op}, \quad t_w = t_{op}.$$

$$\boxed{t_c = \frac{2v_{oy}}{g}} \quad \square .$$

RZUT PIONOWY W DÓŁ

RÓWNANIA RUCHU



Dla ciała wyrzuconego z wysokości ***H*,** prędkością v_0,:

$$\begin{cases} y(t) = H - v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = -v_0 - gt \end{cases}$$

Czas trwania rzutu.

$$t_k = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2H}{g}} - \frac{v_0}{g}$$

Wartość prędkości
Końcowej.

$$v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

Przykład 1 (tablica)

Jechałeś samochodem po prostej drodze z szybkością 70 km/h. Po przebyciu 8,4 km skończyło ci się paliwo i samochód się zatrzymał. Musiałeś iść pieszo 2 km do stacji benzynowej, co zajęło 30 min.

a) Ile wynosiło twoje przemieszczenie od początku podróży do stacji benzynowej?

b) Ile czasu upłynęło od początku podróży, do chwili przybycia na stację benzynową?

c) Ile wynosiła twoja prędkość średnia w czasie od początku podróży do przybycia na stację benzynową (2 sposobami).

d) Załóżmy, że nabrałeś benzyny i wróciłeś do samochodu co zajęło ci 45 min. Ile wynosi twoja średnia prędkość i średnia szybkość w czasie od początku podróży do chwili powrotu z benzyną do samochodu.

e) Załóżmy, że po nalaniu benzyny powróciłeś do punktu startu z prędkością 35 km/h. Ile wynosi średnia prędkość dla całej podróży?

Przykład 1 - rozwiązanie

(zał. Całkowite przemieszczenie w dodatnim kierunku)

ROZWIĄZANIE:

Dane:

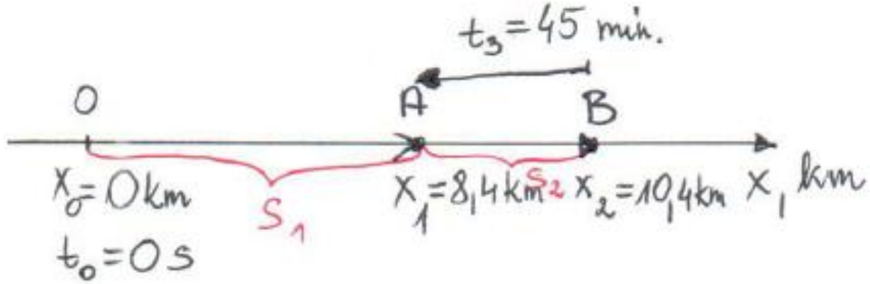
$v_1 = 70 \frac{km}{h}$

$S_1 = 8,4$ km

$S_2 = 2$ km

$t_2 = 30$ min

$t_3 = 45$ min



Szukane:

a) $\Delta x = ?$

b) $t_{OB} = ?$

c) $\vec{v}_{śr_{OB}} = ?$

d) $\vec{v}_{śr} = ?$ (średnia prędkość)

$v_{śr} = ?$ (średnia szybkość!)

e) $\vec{v}_{śrC} = ?$

ad a) Przemieszczenie $\Delta x = ?$

Ogólny wzór na przemieszczenie: $\Delta \vec{r} = \vec{r}_k - \vec{r}_0$ (wektor przemieszczenia)

(W naszym przykładzie) Przemieszczenie jest tylko w jednym kierunku, stąd można wyrazić:

① $\Delta x = x_2 - x_0$

szukane przemieszczenie: $\Delta x = 10,4 \text{ km} - 0 \text{ km} = \underline{10,4 \text{ km}}$.

ad b)

Czas t_{OB} – w ciągu którego przybędziemy na stację benzynową:

(2) $t_{OB} = t_{OA} + t_{AB}$

ogólnie: $S = v \cdot t \Rightarrow \boxed{t = \frac{S}{v}}\ [s]$,

czyli $t_{OA} = \frac{S_1}{v_1} \Rightarrow t_{OA} = \frac{8{,}4\ km}{70\ \frac{km}{h}} = 0{,}12\ h \approx \underline{7{,}2\ min}$.

$t_{AB} = 30\ min$

Otrzymamy $t_{OB} = 37{,}2\ min = \underline{0{,}62\ h}$

ad c) $v_{śr\,OB} = ?$

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$ – wzór na prędkość średnią

Z uwagi, że mam tylko jeden kierunek (OX), zatem:

$$\vec{v}_{śr\,OB} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}_K - \vec{x}_0}{t_K - t_0}$$

$$v_{śr\,OB} = \frac{10{,}4\,km - 0\,km}{37{,}2\,min} = \frac{10{,}4\,km}{0{,}62\,h} \approx \underline{16{,}77\,\frac{km}{h}}$$

ad d)

Czas powrotu ze stacji benzynowej do samochodu $t_3 = 45$ min.

średnia prędkość: $\vec{v}_{śr} = \dfrac{\vec{x}_K - \vec{x}_0}{t_K - t_0}$;

gdzie $t_K = t_1 + t_2 + t_3$

$$t_K = 7{,}2 \text{ min} + 30 \text{ min} + 45 \text{ min} = 82{,}2 \text{ min} = \boxed{1{,}37 h}$$

stąd

$$v_{śr} = \frac{8{,}4 \text{ km} - 0 \text{ km}}{1{,}37 \text{ h}} \approx 6{,}13 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leftarrow \text{średnia prędkość}$$

średnia wartość bezwzględnej prędkości, to średnia szybkość: $V_{śr} = \frac{S_c}{t_c}$ ← całkowita droga, ← całkowity czas trwania ruchu

natomiast $S_c = S_1 + S_2 + S_3$

$$S_c = 8{,}4\,km + 2\,km + 2\,km = \underline{12{,}4\,km}$$

natomiast $t_c = t_k = \underline{1{,}37\,h}$

Zatem średnia szybkość: $v_{śr} = \frac{12{,}4\,km}{1{,}37\,h} = \underline{9{,}1\,\frac{km}{h}}$

e) $v_4 = 35\,\frac{km}{h}$

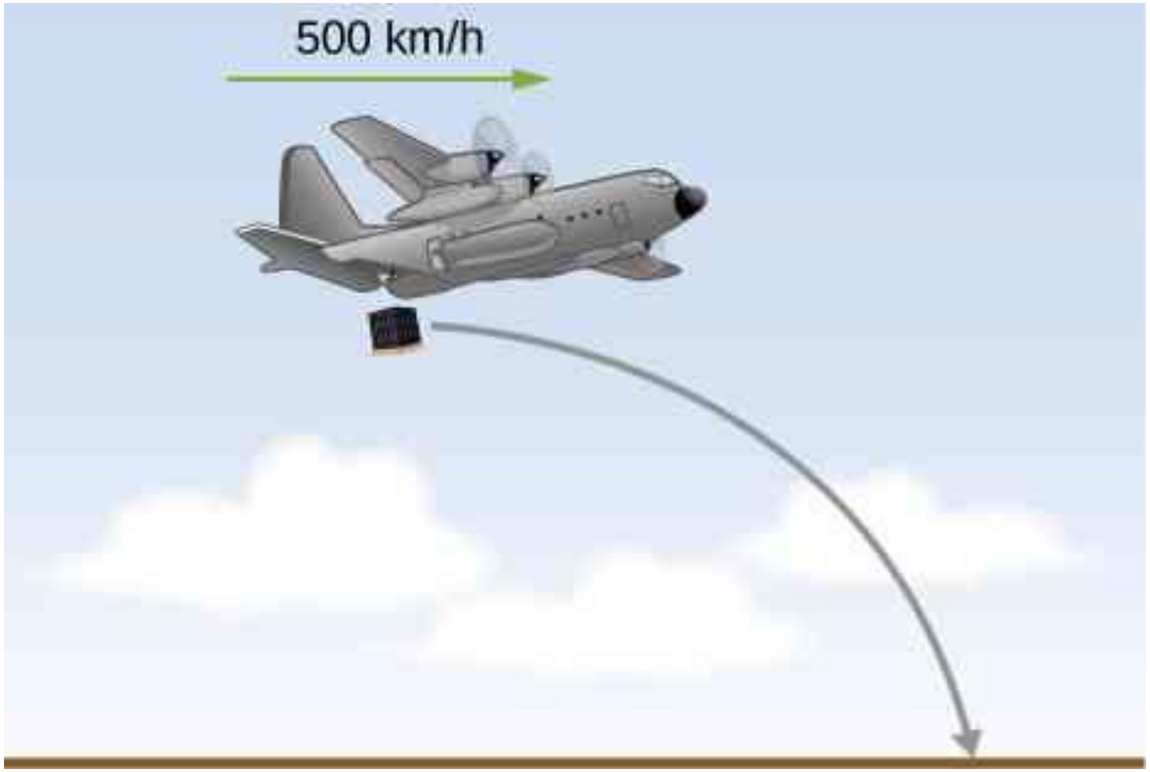
$$\vec{v}_{śr} = \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_0}{t_k - t_0} \Rightarrow \underline{v_{śr} = 0\,\frac{km}{h}}$$ ← dla całej trasy średnia prędkość

Chętni mogą jeszcze policzyć średnia szybkość na całej trasie.

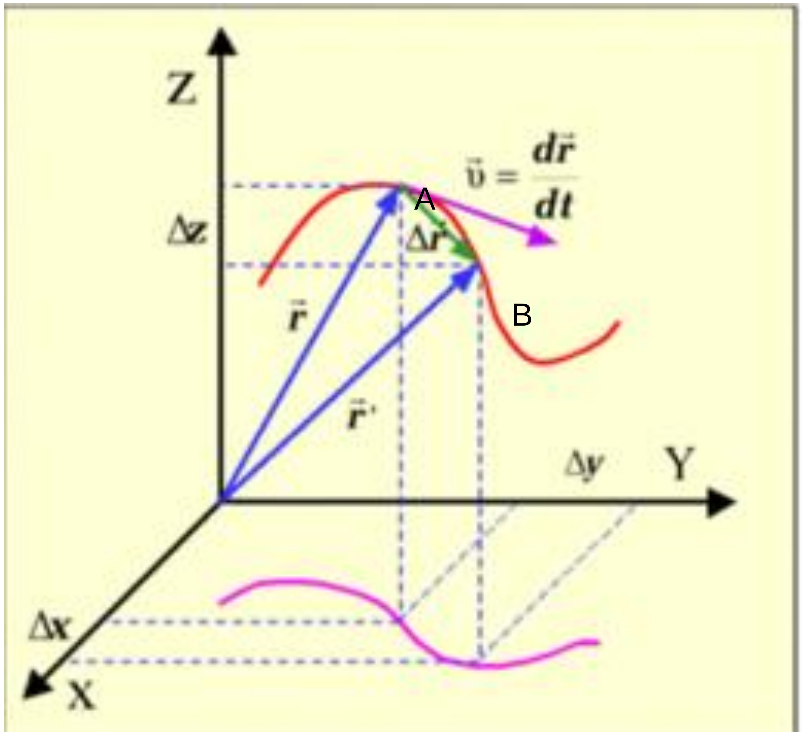
❑ RUCH W DWÓCH I TRZECH WYMIARACH

Założenia:

- tor ruchu nie musi być linią prostą,
- interesuje nas sam ruch i jego zmiany a nie ich przyczyny,
- poruszające się ciało traktujemy jak obiekt punktowy,



Przemieszczenie i prędkość



Rys. Wektor prędkości, w każdym punkcie toru poruszającego się ciała, (jego kierunek), pokrywa się ze styczną do toru i jest prędkością chwilową .

Wektor położenia ciała w funkcji czasu:

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j} + z(t)\cdot\hat{k}$$

Przemieszczenie:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\cdot\hat{i} + \Delta y\cdot\hat{j} + \Delta z\cdot\hat{k}$$

Prędkość średnia:

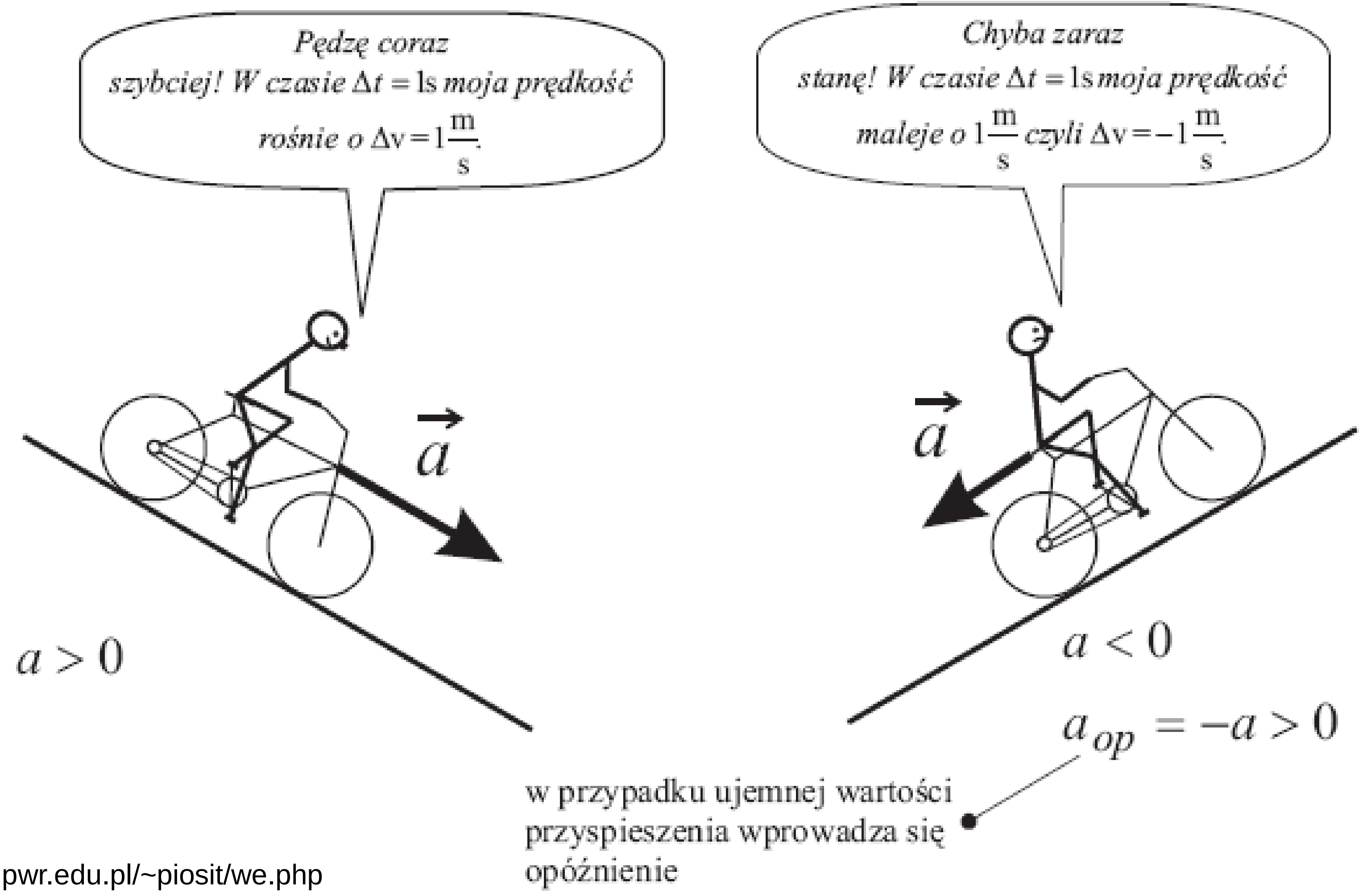
$$\vec{v}_{śr.} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

Prędkość chwilowa:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{\vec{v}_x}\cdot\hat{i} + \overbrace{\frac{dy}{dt}}^{\vec{v}_y}\cdot\hat{j} + \overbrace{\frac{dz}{dt}}^{\vec{v}_z}\cdot\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\quad\left(1\frac{m}{s}\right)}$$

❖ **PRZYSPIESZENIE** (*ang. acceleration,* $\vec{a}$ *, jedn.* $1\frac{m}{s^2}$**),** to wielkość wektorowa, która określa zmiany wektora prędkości w czasie poruszającego się ciała (zarówno wartości, jak i kierunku).



Rys. źródło:
http://www.if.pwr.edu.pl/~piosit/we.php

❑ RUCH W DWÓCH I TRZECH WYMIARACH

➢**PRZYSPIESZENIE ŚREDNIE**:

zmiana wektora prędkości

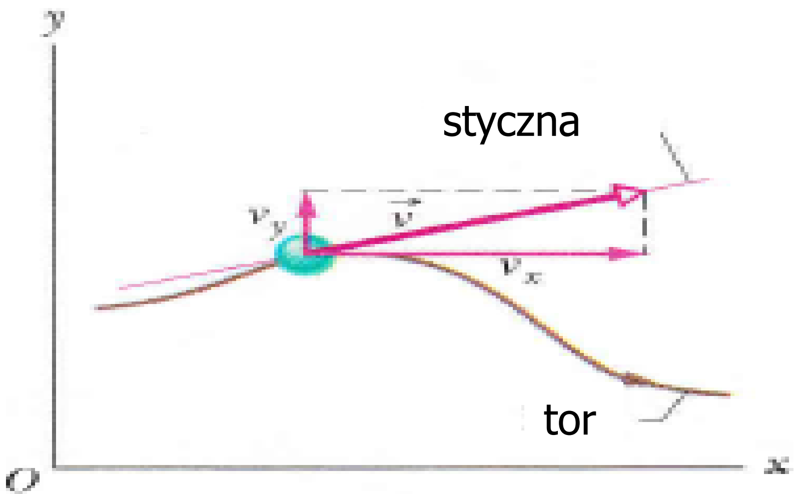
$$\vec{a}_{śr} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \left(1\frac{m}{s^2}\right)$$

przedział czasu

➢**PRZYSPIESZENIE CHWILOWE :**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \left(1\frac{m}{s^2}\right)$$

Zauważamy, **przyspieszenie jest też drugą pochodną wektora położenia względem czasu.**

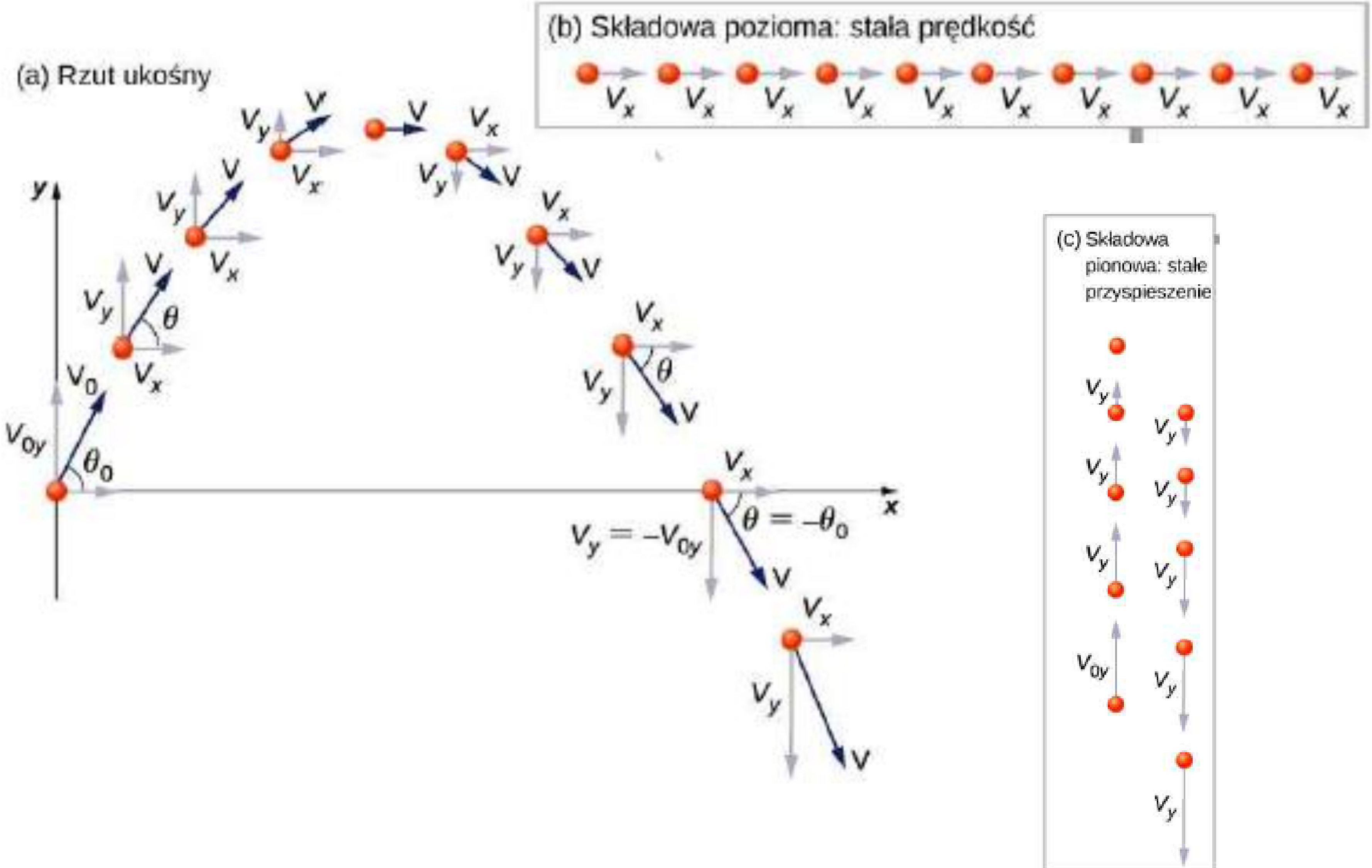


Składowe wektor przyspieszenia
w układzie współrzędnych prostokątnych:

$$\vec{a} = \overbrace{\frac{dv_x}{dt}}^{\vec{a}_x} \cdot \hat{i} + \overbrace{\frac{dv_y}{dt}}^{\vec{a}_y} \cdot \hat{j} + \overbrace{\frac{dv_z}{dt}}^{\vec{a}_z} \cdot \hat{k}$$

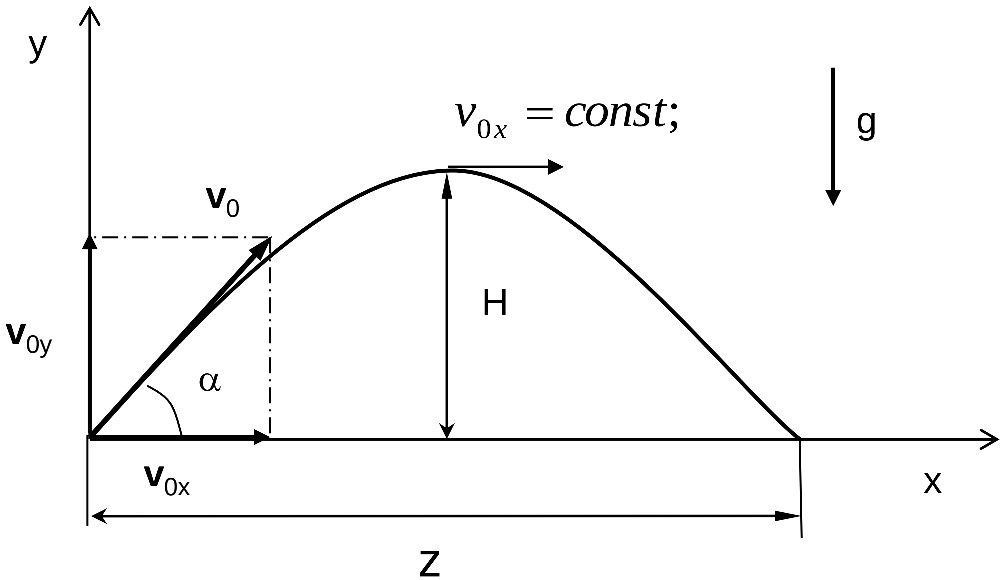
2.4.1. RZUT UKOŚNY - ruch krzywoliniowy

Jak zmienia się prędkość ciała w dowolnej chwili?



Rzut ukośny jest złożeniem dwóch ruchów :

- **ruchu jednostajnego w kierunku poziomym**
- **ruchu jednostajnie zmiennego w kierunku pionowym**:



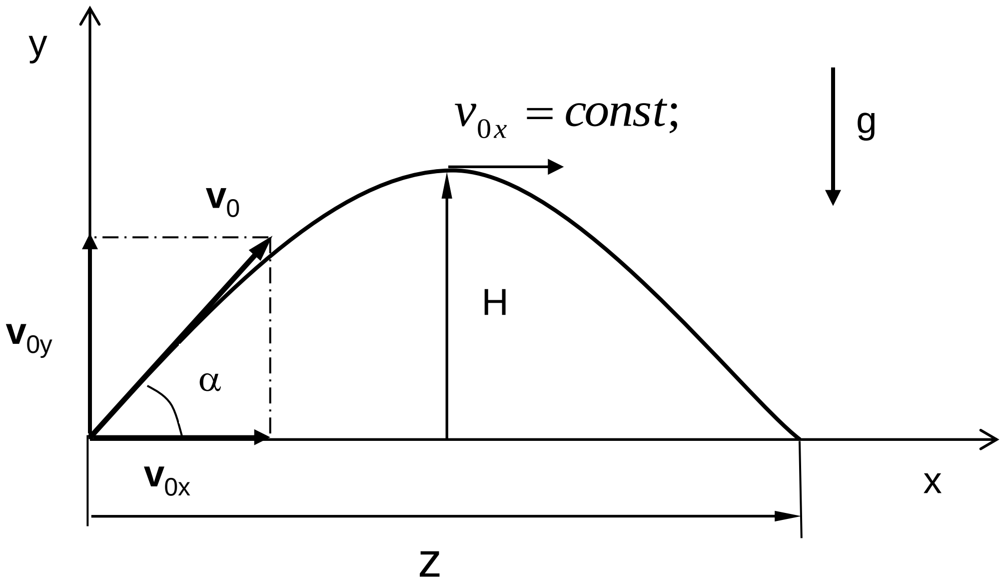
Rys. Rzut ukośny:

Składowe wektora prędkości początkowej $\mathbf{v}_0$:

$$\begin{cases} v_{ox} = v_0 \cos\alpha \\ v_{oy} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Rzut ukośny jest złożeniem dwóch ruchów :

- **ruchu jednostajnego w kierunku poziomym** - z prędkością: $v_{ox} = v_0 \cos\alpha = const$
- **ruchu jednostajnie zmiennego w kierunku pionowym**: -z prędkością początkową: $v_{oy} = v_0 \sin\alpha$ i przyspieszeniem g.



Rys. Rzut ukośny:

RÓWNANIA RUCHU:

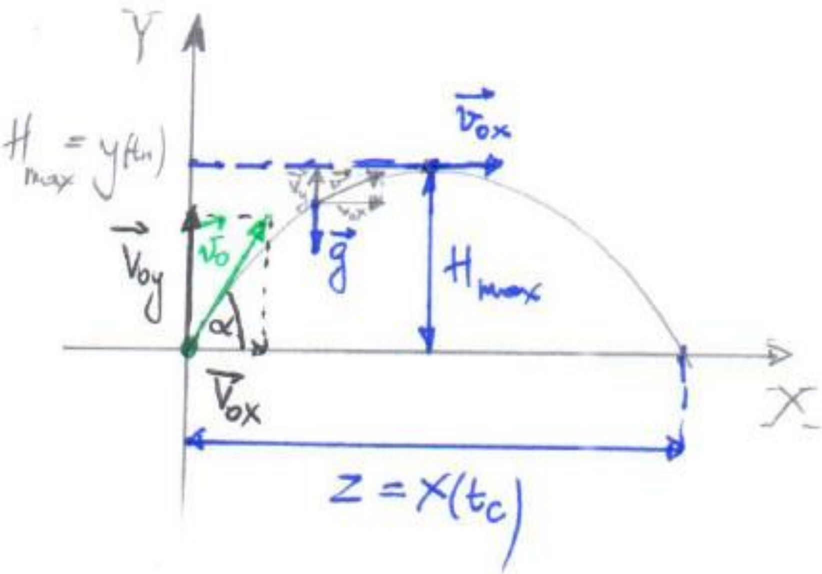
Dla ciała wyrzuconego z położenia (0,0) z prędkością v_0, *pod* α do poziomu:

$$\vec{r}(t): \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \dfrac{g t^2}{2} \end{cases}$$

$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_{0x} \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

RZUT UKOŚNY- wyprowadzenie wzorów



Równania ruchu: (dla ciała wyrzuconego z pkt. (0,0) z prędkością V_0 pod kątem α do poziomu

a) położenie:

$$\vec{r}(t): \begin{cases} x(t) = v_{ox} \cdot t \\ y(t) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{y_0}} + v_{oy} t + \frac{at^2}{2} \end{cases} ; \quad a = -g$$

$\vec{r} = [x, y]$ m

❑ RZUT UKOŚNY wyprowadzenie wzorów

b) prędkość:

$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \left(v_{0x} \cdot t\right)' = \underline{\underline{v_{0x}}} \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = \left(v_{0y} t - \dfrac{g t^2}{2}\right)' = v_{0y} - \dfrac{g \cdot \cancel{2} t}{\cancel{2}} = \underline{\underline{v_{0y} - gt}} \end{cases}$$

; $\vec{v} = [v_x, v_y] \frac{m}{s}$

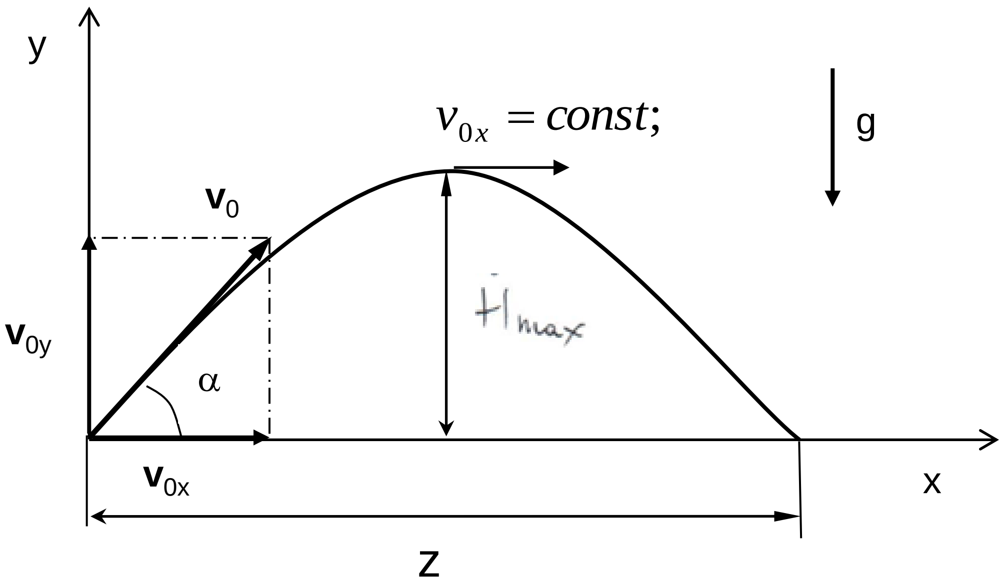
$\vec{v}(t) = [v_{0x}, (v_{0y} - gt)]$

c) przyspieszenie:

$$\vec{a}(t): \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y}{dt} = \left(v_{0y} - gt\right)' = -g \end{cases}$$

Z powyższych równań możemy wyznaczyć wysokość maksymalną jaką ciało osiągnie (H_{max}), czas trwania ruchu ($t_c = t_w + t_{op}$) oraz zasięg rzutu ($Z = v_{0x} \cdot t_c$).

Przykład 1- rzut ukośny



Ciało wyrzucono z położenia (0,0) - rys. z prędkością $v_0, pod\ \alpha$ do poziomu . Napisać równania ruchu , wyznaczyć maksymalną wysokość, czas trwania ruchu oraz jego zasięg.
Opór powietrza pominąć.

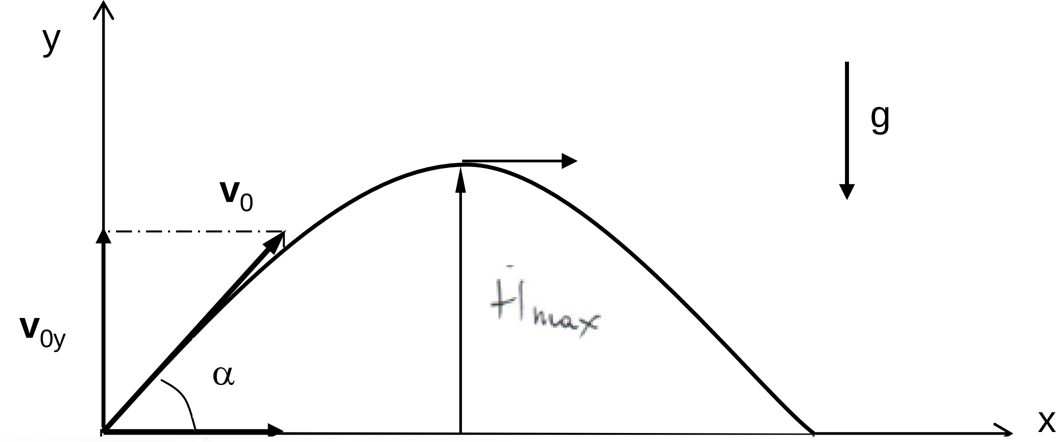
RÓWNANIA RUCHU:

(a), (b)
$$\vec{r}(t): \begin{cases} x(t) = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

(c), (d)
$$\vec{v}(t): \begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_{0x} \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = v_{0y} - gt \end{cases}$$

Z rys.
$$\begin{cases} v_{ox} = v_0 \cos\alpha \\ v_{oy} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

❑ Rzut ukośny c.d.



Dane:

v_0, α

Szukane:

a) $H_{max} = ?$

b) $t_c = ?$

c) $z = ?$

ad a) Maksymalną wysokość ciało osiągnie w czasie $t = t_w$; wtedy

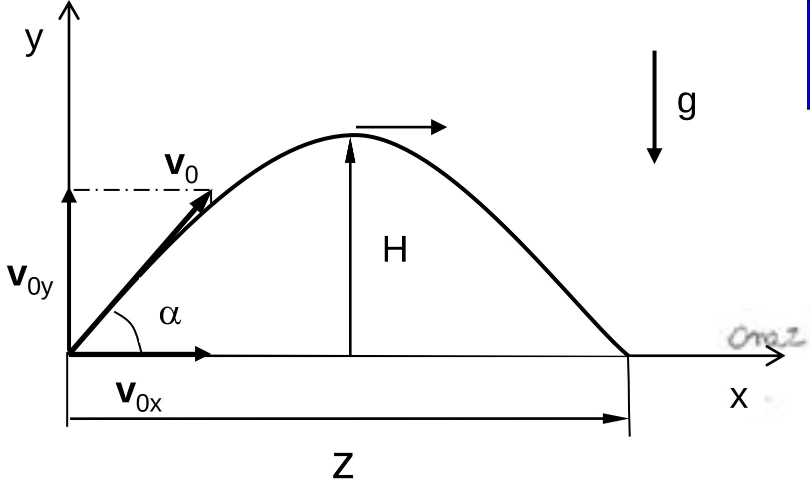
$$\begin{cases} (1)\ y(t_w) = H_{max} \\ (2)\ v_y(t_w) = 0 \end{cases}$$

Biorąc pod uwagę (b) i $t = t_w$ mamy

oraz (c):

$$\begin{cases} (3)\ H_{max} = v_{0y} \cdot t_w - \dfrac{g t_w^2}{2} \\ (4)\ v_{0y} - g t_w = 0 \Rightarrow (5)\ t_w = \dfrac{v_{0y}}{g} \end{cases}$$

❑ Rzut ukośny c.d.



oraz (c):

$$\begin{cases} (3)\ H_{max} = v_{0y} t_w - \dfrac{g t_w^2}{2} \\ (4)\ v_{0y} - g t_w = 0 \Rightarrow (5)\ t_w = \dfrac{v_{0y}}{g} \end{cases}$$

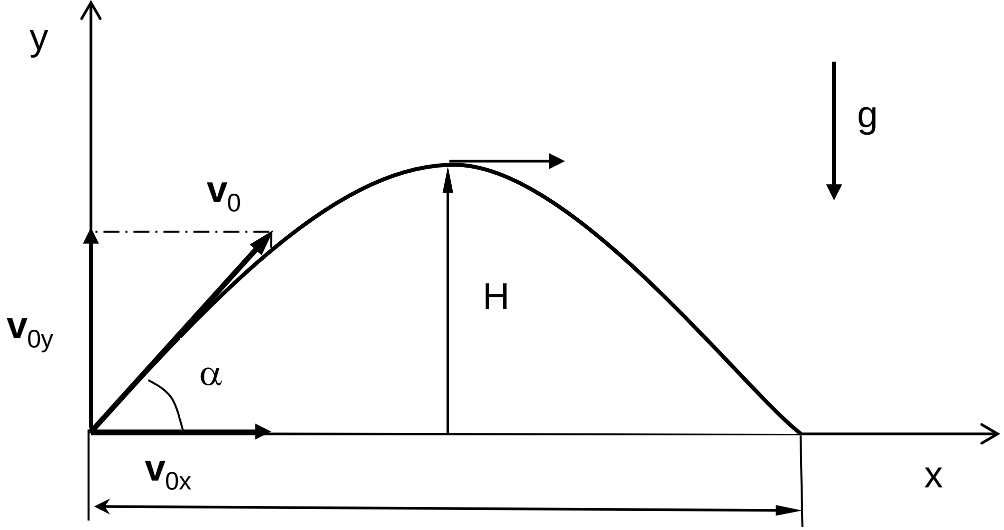
(5) → (3):

$$(6)\ H_{max} = v_{0y} \cdot \frac{v_{0y}}{g} - \frac{g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2}{2} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

z rys.

$$\frac{v_{0y}}{v_0} = \sin\alpha \Rightarrow (*)\ v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

$$(7)\ \boxed{H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$



ad b)

$t_c = t_w + t_{op}$, ale $^{(*)}\, t_w = t_{op}$ – w tym przypadku

Korzystając z (*) i (5) $t_w = \frac{v_{oy}}{g}$, mamy

(8) $t_c = 2t_w = 2 \cdot \frac{v_{oy}}{g} = 2 \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

$\frac{v_{oy}}{v_0} = \sin\alpha$

$$\boxed{t_c = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$$

❑ Rzut ukośny c.d.

ad c) $Z = x(t_c)$

Biorąc pod uwagę wzór (α), możemy napisać:

$Z = v_{0x} \cdot t_c$; z rys. $\boxed{\frac{v_{0x}}{v_0} = \cos\alpha} \Rightarrow \boxed{v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$ **

Podstawiając do wzoru (8) $t_c = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$ i (**) otrzymamy:

$$Z = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

Korzystając z zal. trygonometrycznej:

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$, zasięg ma postać :

$$\boxed{Z = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$

RZUT UKOŚNY - podsumowanie

• **Otrzymane parametry:**

➢ **Zasięg (Z) rzutu:**

$$Z = x(t_c) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

➢ **Maksymalna wysokość wzniesienia H_{max}:**

$$H_{max} = y(t_w) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

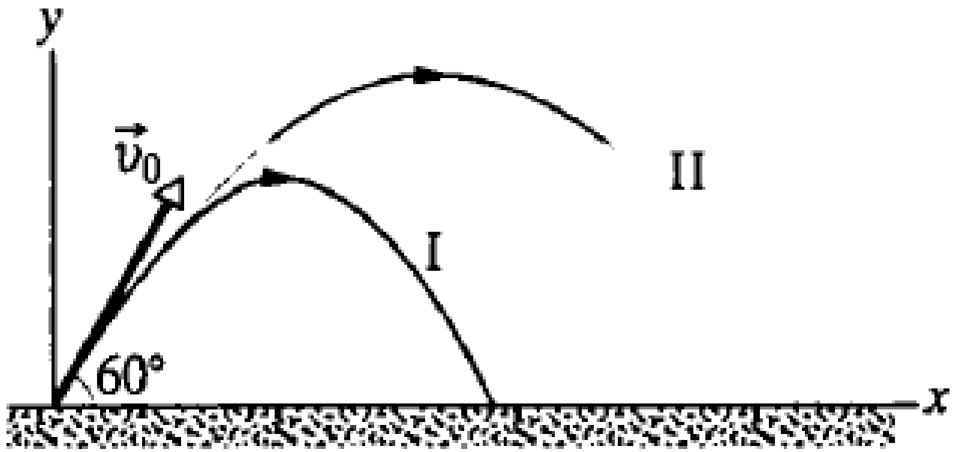
(z warunku: $v_y(t_w) = 0$)

• **Równanie toru** dla rzutu ukośnego- trajektoria ruchu:

$$y(x) = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2(v_o \cos\alpha)^2} \cdot x^2$$

Tablica- Przykłady

➢ Opór powietrza



Rys. 4.14. I) Tor „wysokiej piłki". obliczony z uwzględnieniem oporu powietrza. II) Tor piłki w próżni, tzn. obliczony przy zastosowaniu metod przedstawionych w tym rozdziale. Dane liczbowe zebrano w tabeli 4.1 (na podstawie artykułu Petera J. Brancazio „The Trajectory of a Fly Ball", *The Physics Teacher*, styczeń 1985)

Tabela 4.1. Dwie „wysokie piłki"[1]

	Tor I (w powietrzu)	Tor II (w próżni)
zasięg	98.5 m	177 m
największa wysokość	53 m	76,8 m
czas lotu	6,6 s	7,9 s

[1] Patrz rysunek 4.14. Prędkość początkowa ma wartość 44,7 m/s i jest skierowana pod kątem 60° do poziomu.

Źródło: D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, "Podstawy fizyki , tom I".

Przykład 2- rzut ukośny

Podczas pokazu sztucznych ogni rakietę z ładunkiem wybuchowym wystrzelono w powietrze z początkową prędkością o wartości 70,00 m/s pod kątem 75° nad horyzontem (rys.). Lont ma taką długość, aby ładunek został odpalony w najwyższym punkcie toru lotu rakiety. Oblicz:

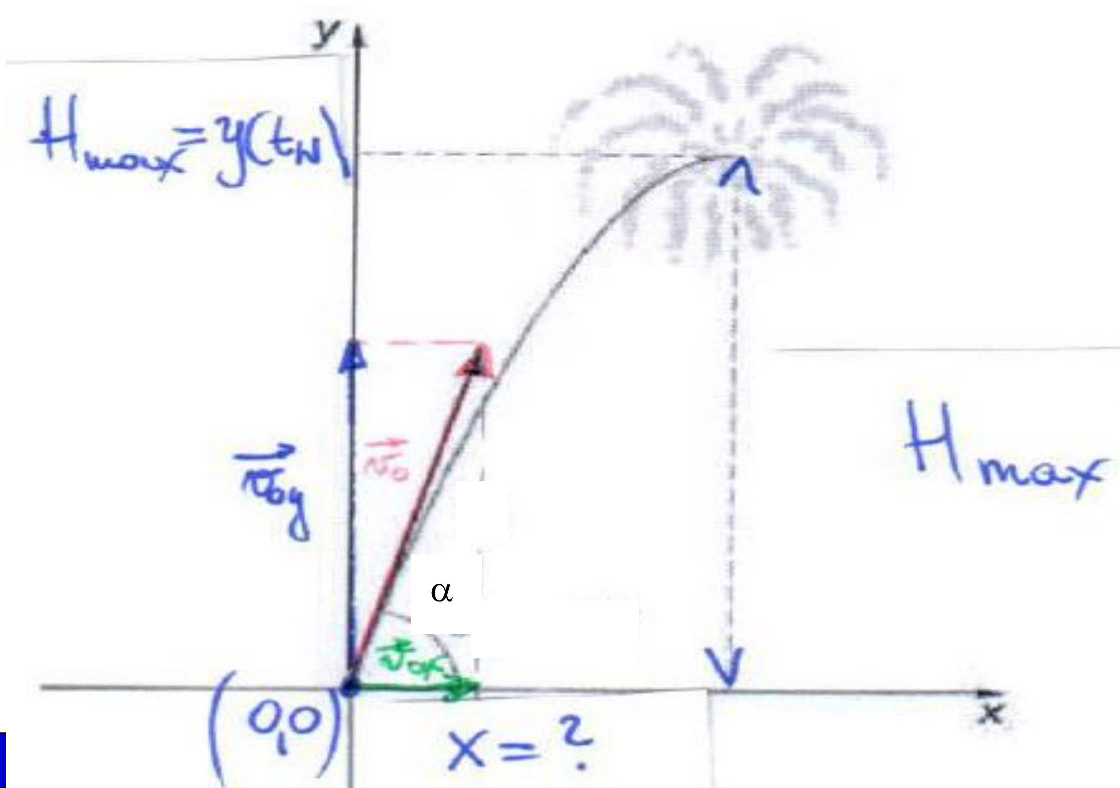
a) wysokość, na jakiej ładunek wybuchnie.

b) po jakim czasie od wystrzelenia rakiety dojdzie do wybuchu?

c) w jakiej odległości liczonej w poziomie od miejsca wystrzelenia dojdzie do wybuchu fajerwerku?

d) jakie jest całkowite przemieszczenie rakiety od startu do momentu wybuchu ładunku?

Opór powietrza pomijamy.



Z rys.:

$$\begin{cases} \dfrac{v_{0x}}{v_0} = \cos\alpha \Rightarrow V_{0x} = V_0 \cos\alpha \\ \dfrac{V_{0y}}{V_0} = \sin\alpha \Rightarrow V_{0y} = V_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Przykład 2-rozwiązanie

Dane:

$v_0 = 70 \frac{m}{s}$

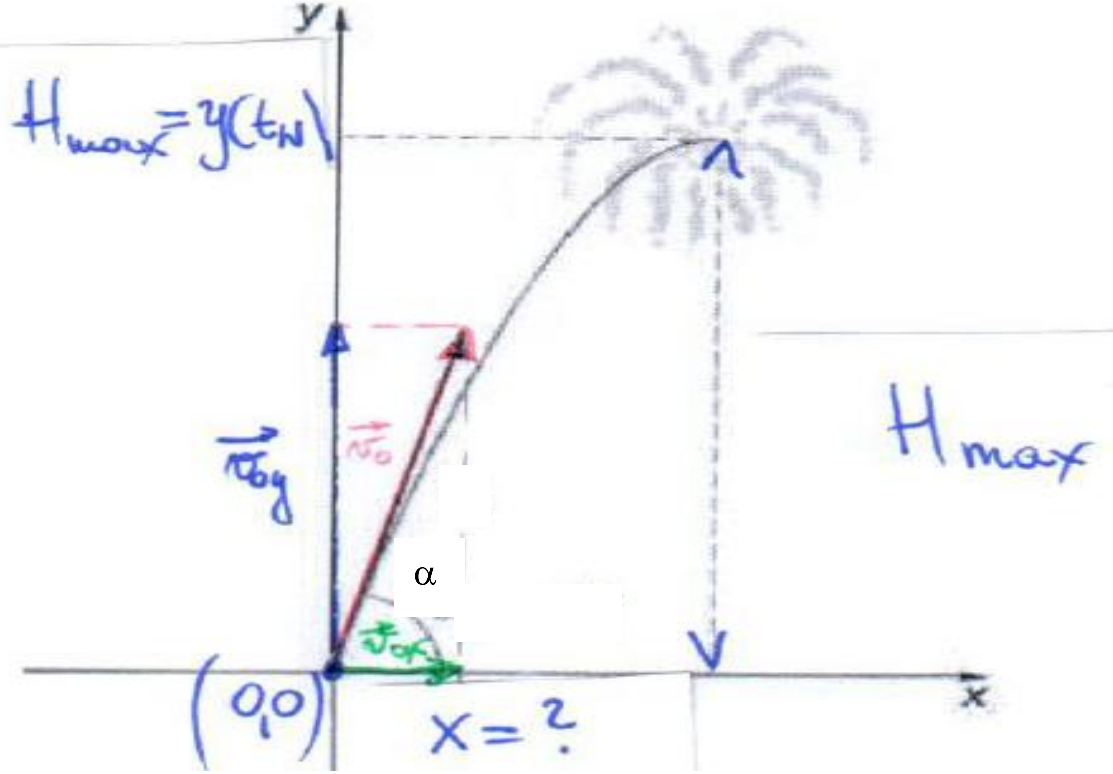
$\alpha = 75^\circ$

$g = 9{,}81 \frac{m}{s^2} \simeq 10 \frac{m}{s^2}$

Szukane:

a) $H_{max} = ?$

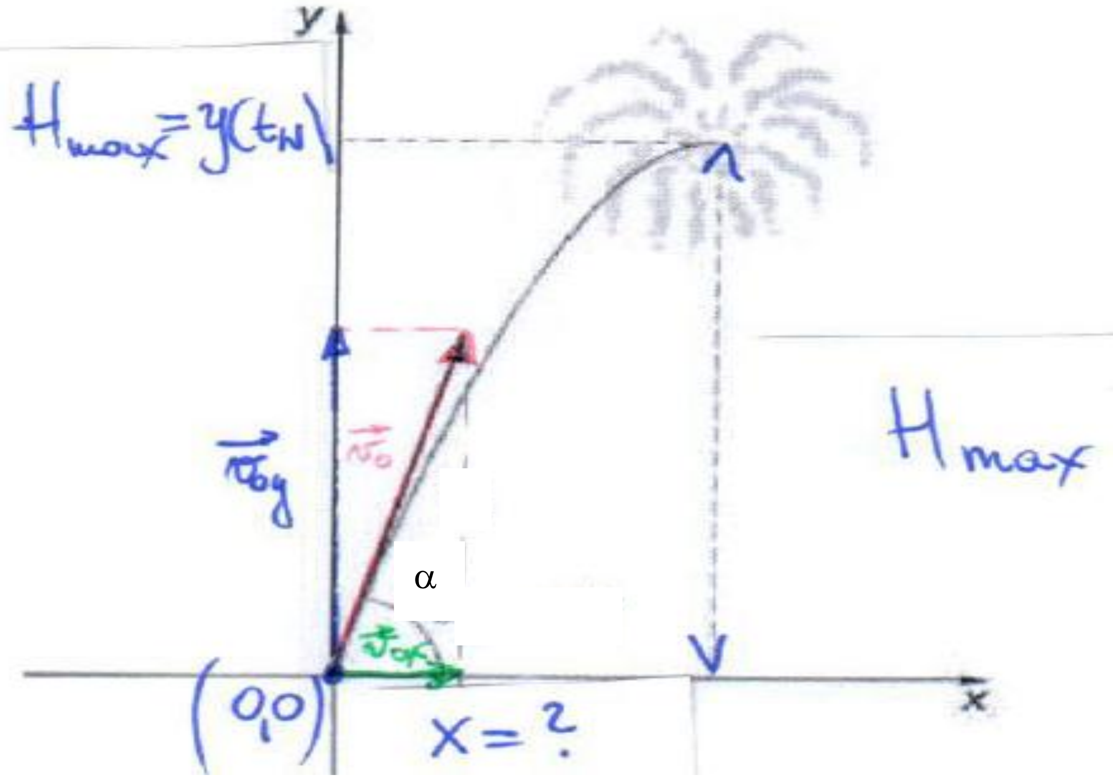
b) $t_w = ?$



ad a/ Ładunek wybuchnie na wysokości maksymalnej (w najw. p-cie toru) w czasie $t = t_w$, wtedy:

$$\begin{cases} y(t_w) = H_{max} & (1) \\ v_y(t_w) = 0 & (2) \end{cases}$$

Przykład 2-rozwiązanie



Uwzględniając zależności y(t) i v(t) dla rzutu ukośnego, przy czym $t=t_w$, mamy więc:

$$③ \begin{cases} H_{max} = y(t_w) = \underset{\overset{\parallel}{0}}{y_o} + v_{oy} \cdot t_w - \dfrac{g t_w^2}{2} \\ ④ \quad v_{oy} - g \cdot t_w = 0 \Rightarrow ⑤ \; \underline{t_w = \dfrac{v_{oy}}{g}} \end{cases}$$

$$⑤ \rightarrow ③ \Rightarrow$$

Przykład 2-rozwiązanie

$$⑥:\ H_{max} = v_{oy} \cdot \frac{v_{oy}}{g} - \frac{g\left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2}{2} = \underline{\frac{v_{oy}^2}{2g}}$$

z np.:

$$v_{oy} = v_o \sin\alpha$$

$$⑦\ v_{oy} = 70\frac{m}{s} \cdot \sin 75^\circ = \underline{67{,}6\frac{m}{s}}$$

Po podstawieniu ⑦ → ⑥, otrzymamy:

$$H_{max} = \frac{\left(67{,}6\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}} = 232{,}9\,m \approx \underline{\underline{233\,m}}$$

Przykład 2-rozwiązanie

ad b) 25: $t_w = \frac{V_{oy}}{g} \Rightarrow t_w = \frac{67{,}6\,\frac{m}{s}}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = 6{,}89\,s \approx 6{,}9\,s.$

ad c) 9

$$x = v_{ox} \cdot t_w$$

$v_{ox} = V_o \cos\alpha$

$V_{ox} = 70\frac{m}{s} \cdot \cos 75^0$

10 $V_{ox} \cong 18{,}1\,\frac{m}{s}.$

$x = 124{,}89\,m \approx 125\,m$

* Od przyspieszenia do równania ruchu (*dla dociekliwych:)

Znając przyspieszenie (a =const.) ciała można znaleźć prędkość, przemieszczenie lub drogę tego ruchu.

Z definicji $a = \frac{dv}{dt}$ wynika : $dv = adt$

Całkując obie strony równania (2.35), otrzymujemy: $\boxed{\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt}$

a ponieważ **a= const**, stąd: $v - v_0 = a(t - t_0)$

W przypadku t_0=0s, równość (2.37) przyjmuje postać: $\boxed{v(t) = a \cdot t + v_0}$

Z definicji prędkości chwilowej $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, otrzymujemy: $d\vec{r} = \vec{v}dt$

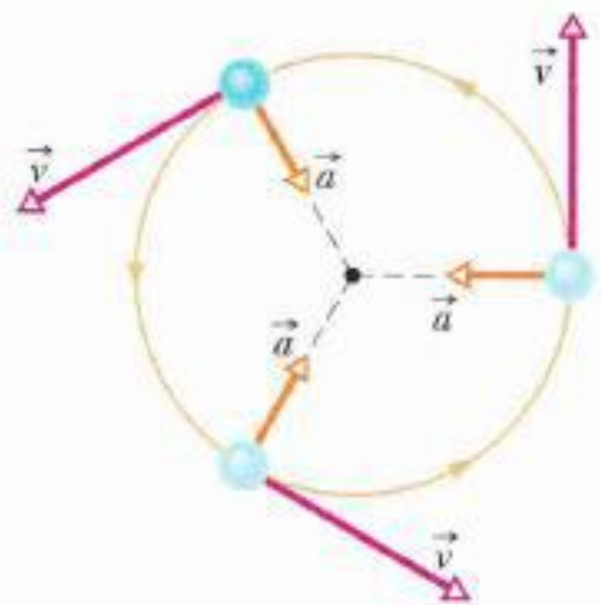
Całkując obie strony równania (2.39), otrzymujemy: $\boxed{\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt}$

Całka po czasie z wektora prędkości wyraża **przemieszczenie ciała w przestrzeni**.

Ruch jednostajny po okręgu

- ruch cząstki odbywa się po okręgu lub kołowym łuku z prędkością o stałej wartości bezwzględnej,

- choć wartość prędkości się nie zmienia, ruch cząstki jest **ruchem przyspieszonym .**



Uzasadnienie:

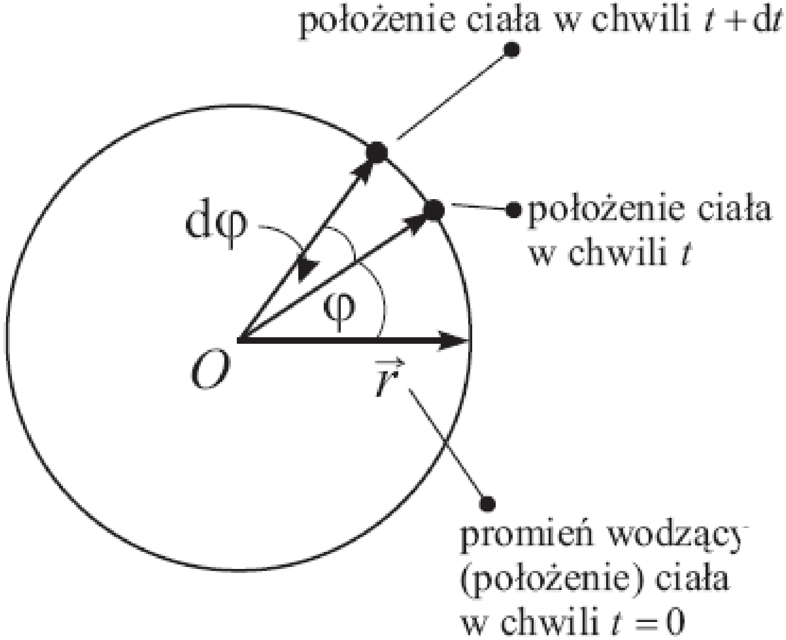
Przyspieszenie (zmiana prędkości) kojarzy się ze Wzrostem lub zmniejszaniem się wartości bezwzględnej prędkości . Prędkość jest wektorem, a nie skalarem. Jeśli zmienia się choćby tylko jej kierunek, to ruch jest przyspieszony.

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

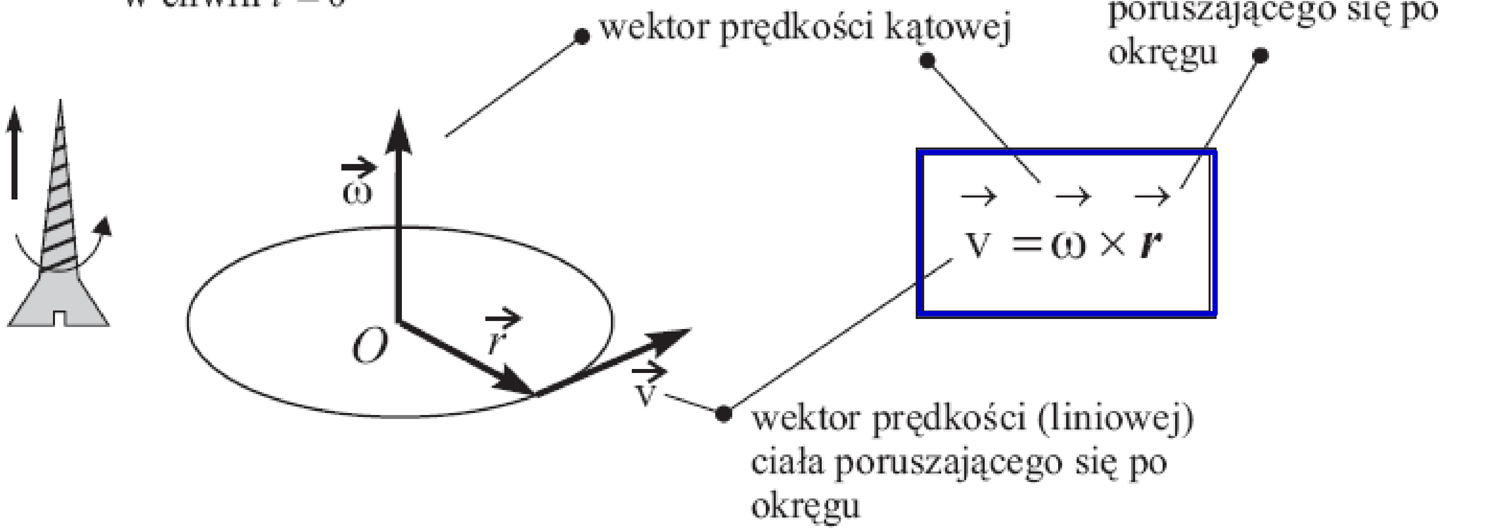
promień okręgu

Okres-czas potrzebny cząstce na jednokrotny obieg zamkniętego toru.

▪ Wielkości kątowe – wektor prędkości kątowej



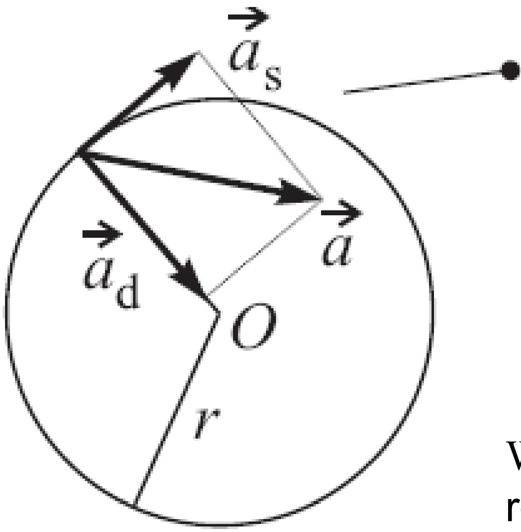
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$



$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

▪ Wielkości kątowe – przyspieszenie kątowe

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}}$$



rozkład wektora przyspieszenia całkowitego $\vec{a}$ na wektor przyspieszenia stycznego $\vec{a}_s$ i dośrodkowego $\vec{a}_d$

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_d$$

$$a_s = \varepsilon r$$

$$a_d = \omega^2 r$$

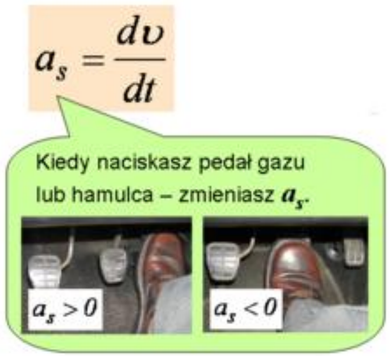
Wartości poszczególnych składowych przyspieszenia również wyrażamy wzorami:

$$\boxed{a_s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}} \quad \text{oraz} \quad \boxed{d_d = \frac{v^2}{r}}$$

Zależności między wielkościami liniowymi a kątowymi w ruchu po okręgu

wielkości liniowe	wielkości kątowe
$a_s = \varepsilon R = \mathrm{const}$ $a_{\text{dośr}} = \omega^2 R$ $a = \sqrt{a_s^2 + a_{\text{dośr}}^2}$ $v = v_0 + a_s t$ $s = v_0 t + \frac{a_s t^2}{2}$	$\varepsilon = \mathrm{const}$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ $\alpha = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
ruch jednostajnie opóźniony po okręgu	
$a_{ops} = -a_s = \mathrm{const} > 0$ $v = v_0 - a_{ops} t$ $s = v_0 t - \frac{a_{ops} t^2}{2}$	$\varepsilon_{op} = -\varepsilon = \mathrm{const} > 0$ $\omega = \omega_0 - \varepsilon_{op} t$ $\alpha = \omega_0 t - \frac{\varepsilon_{op} t^2}{2}$

Występowanie:



Dziękuję za uwagę !