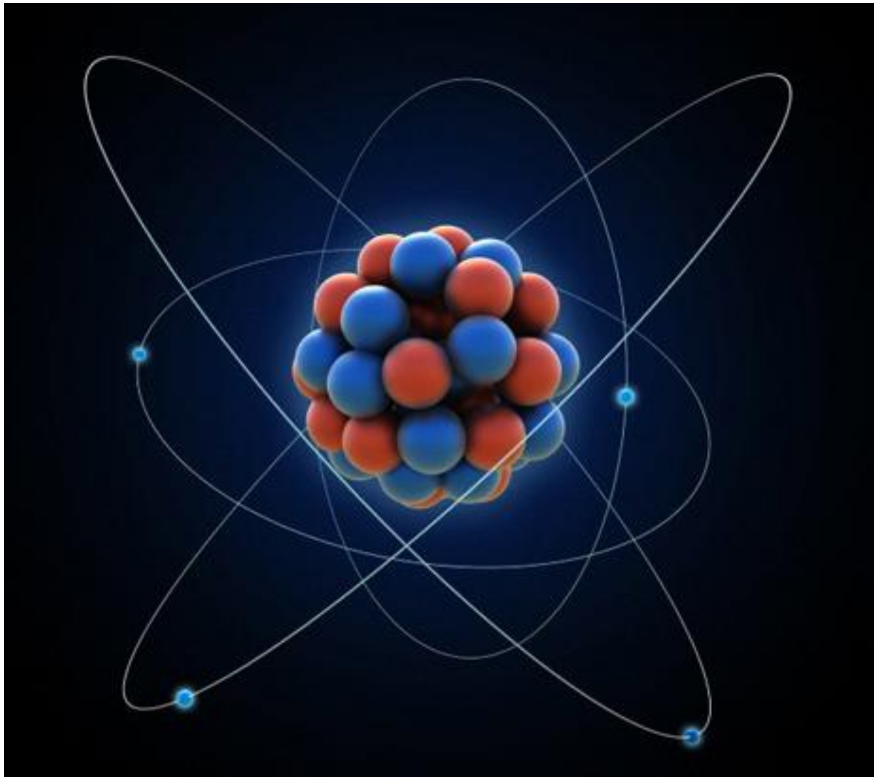
ELEKTRYCZNOŚĆ

„Uczyć się bez myślenia to zmarnowana praca,
Myśleć bez uczenia się to pustka.”

Konfucjusz (właściwie K’ung Ch’iu, 551 – 479 p.n.e.) Dialogi, II/15

Wykład 12

1. **Ładunek elektryczny**
2. **Prawo Coulomba**
3. **Pole elektryczne**
4. **Indukcja pola elektrycznego**
5. **Strumień pola. Prawo Gaussa**
6. **Praca w polu elektrostatycznym**
7. **Energia potencjalna i potencjał**



W 2014 roku wykorzystując jony węgla, Sven Sturm z kolegami z Max-Planck-Institut w Heidelberg, ustalili z wysoką precyzja , że **elektron ma masę równą 1 / 1836.15267377 protonu (10^{-30} kg).**
https://www.nature.com/nature/journal/v506/n7489/full/nature13026.html (Science Photo Andrzej Wojcicki).

Wstęp

Początki nauki o elektryczności sięgają czasów Talesa z Miletu (VI w. p.n.e.), który obserwował przyciąganie źdźbła trawy przez potarty bursztyn.

Bursztyn zwany: jantar, amber (z łac. *sucinum*, czasem także *elektrum* z gr. *ἤλεκτρον* - *elektron*)

Ładunek elektryczny - właściwość cząstek elementarnych, z których składają się wszystkie ciała.

Ładunek elementarny ma wartość :

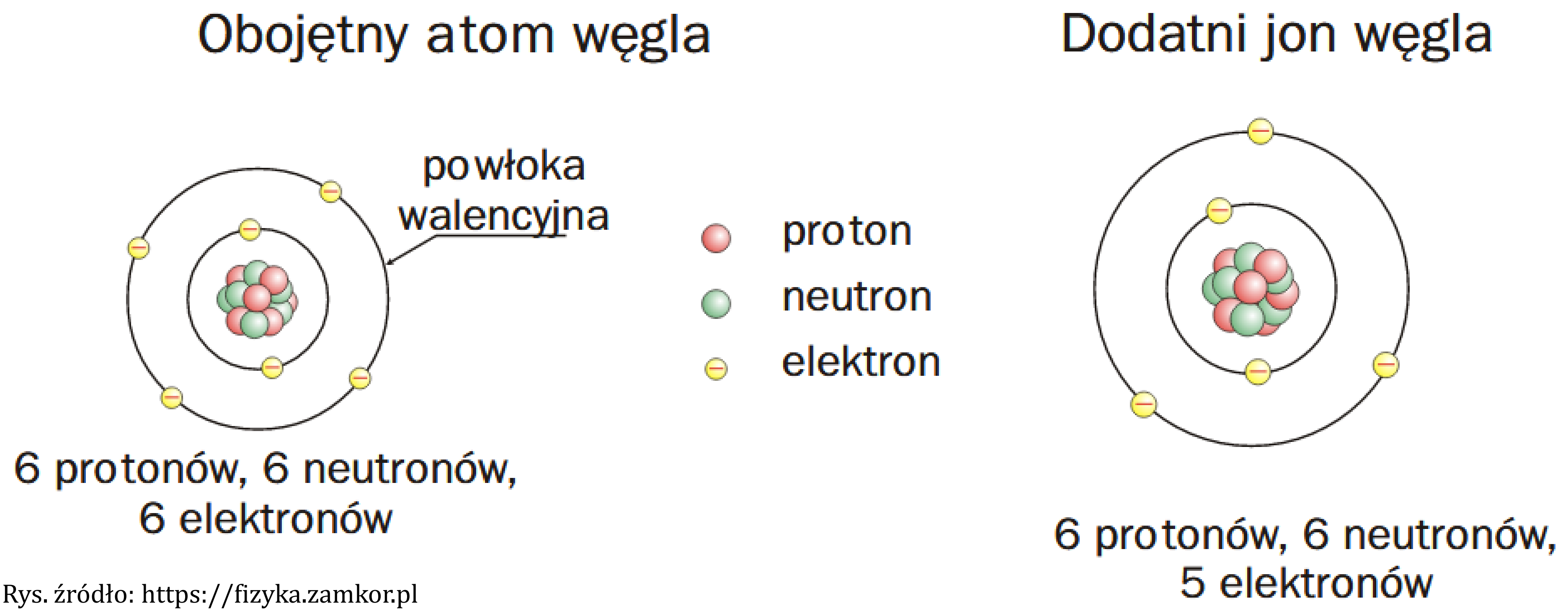
$$e = 1.602 \ x10^{-19} [C]$$

Elementarne ładunki:

e^- : elektrony -e
p^+ : protony +e
n : neutrony 0
e^+ : pozytrony +e

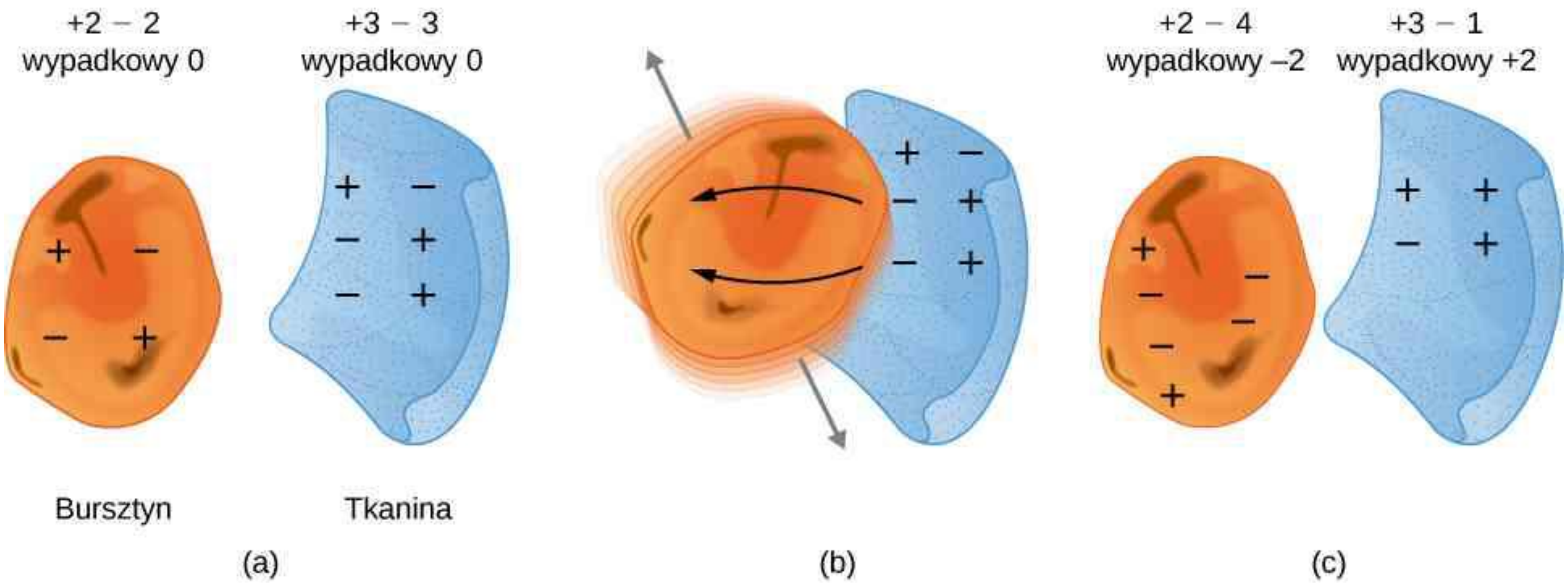
Ładunki protonu i elektronu są sobie równe, w granicy błędu pomiarowego.

Atomy, cząsteczki zbudowane są z elektronów, protonów i neutronów; dwa ostatnie, zwane nukleonami, tworzą jądro atomowe.



Rys. źródło: https://fizyka.zamkor.pl

ŁADUNKI ELEKTRYCZNE I POLA

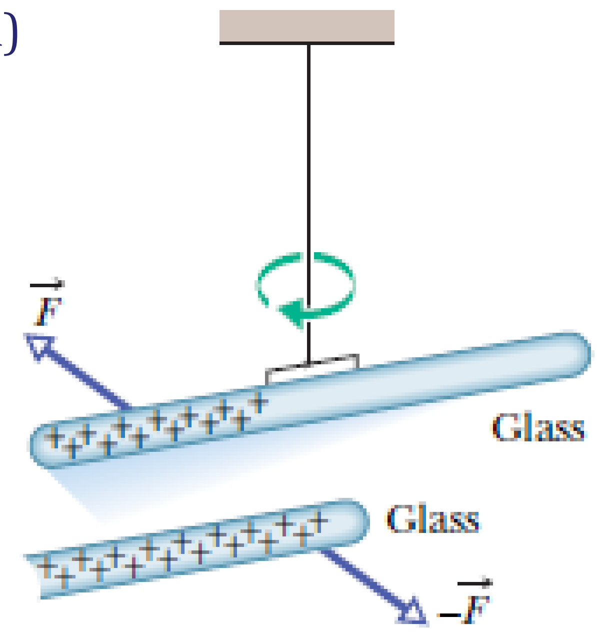


Rys. **„Fizyka dla szkół wyższych" S. J. Ling, J. Sanny, W. Moebs**

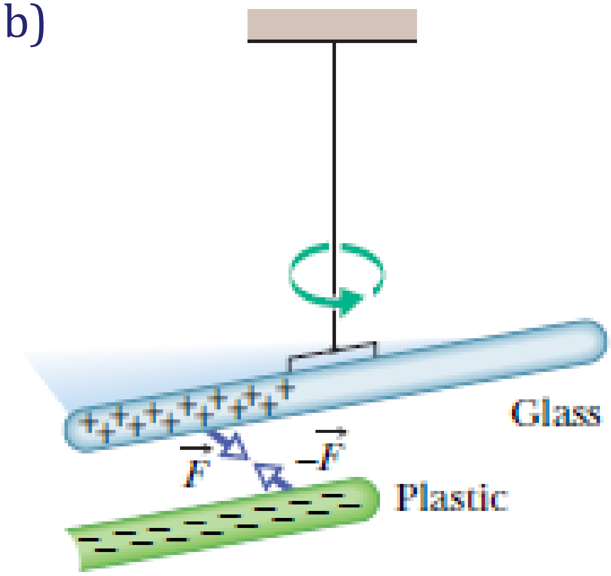
(a) Bursztyn i kawałek tkaniny są początkowo elektrycznie .
(b) Gdy są pocierane o siebie, część ujemnych ładunków przechodzi do bursztynu, a tkanina pozostaje z wypadkowym dodatnim ładunkiem.
(c) Po ich odseparowaniu bursztyn i tkanina posiadają ładunki wypadkowe, przy czym wartości bezwzględne całkowitego ładunku dodatniego i ujemnego są równe.

Oddziaływanie ciał naelektryzowanych

a)



b)



Rys. Ładunki elektryczne jednoimienne odpychają się (a), a ładunki elektryczne różnoimienne przyciągają się (b). Rys. źródło: Halliday,Resnick,Walker „Fundamentals of Physics".

Ładunki elektryczne podlegają dwóm fundamentalnym prawom

Ładunek elementarny :

$$e = 1.602 \ x10^{-19} [C]$$

1. **Ładunek podlega prawu zachowania.**

   Całkowity ładunek elektryczny układu odosobnionego w dowolnej chwili nie może ulegać zmianie.

2. **Kwantyzacja ładunku**

   Ładunek elektryczny jest całkowitą wielokrotnością ładunku elementarnego.

całkowity ładunek elektryczny układu

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = ne$$

suma ładunków elementarnych w układzie

Elementarne ładunki:
e^- : elektrony -e
p^+ : protony +e
n : neutrony 0
e^+ : pozytrony +e

Kwarki, czyli cząstki, z których zbudowane są protony i neutrony, mają ładunki ±e/3 lub ±2e/3, ale są one zawsze uwięzione, tzn. nie mogą być indywidualnie obserwowane. Z tego powodu oraz ze względów historycznych, ich ładunków nie traktuje się jako ładunku elementarnego.

Podział materiałów ze względu na właściwości elektryczne

Przewodniki → Materiały, w których **ładunki** elektryczne, *czyli **elektrony przewodnictwa***, nie są związane z poszczególnymi atomami i pomimo pewnego oporu elektrycznego, mogą poruszać się swobodnie w całym materiale.

Rys. W zasilaczu wykorzystane są przewody metalowe i wtyczki do przewodzenia elektryczności z gniazdka w ścianie do laptopa. Przewodzące druty pozwalają elektronom swobodnie przemieszczać się wzdłuż kabli. Kable są osłonięte gumą i plastikiem- te materiały są izolatorami, nie pozwalają na ucieczkę ładunków elektrycznych na zewnątrz.

Podział materiałów ze względu na właściwości elektryczne

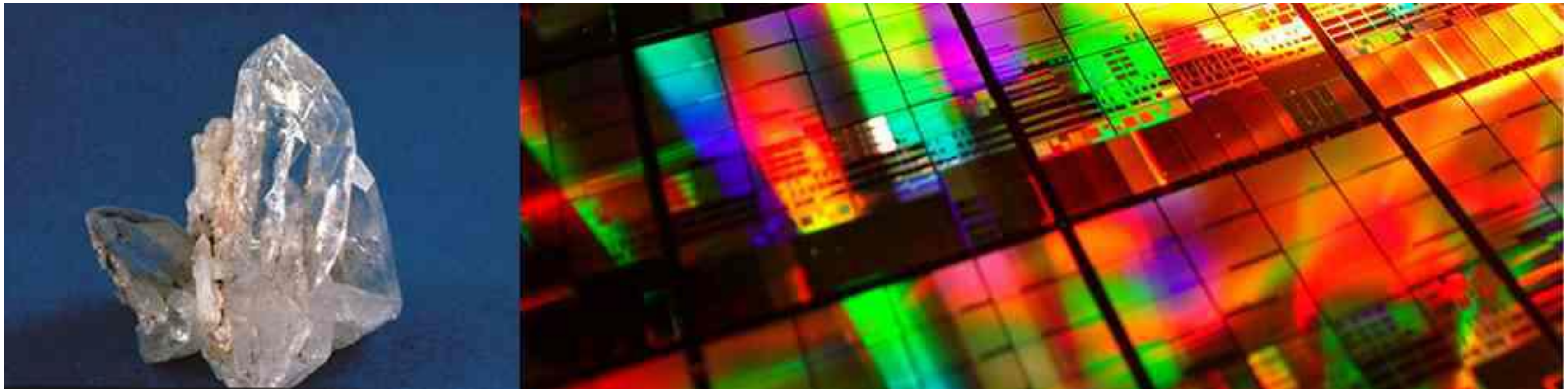
Izolatory $\rightarrow$ materiały , w których ułożenie atomów i struktura krystaliczna nie pozwalają na istnienie swobodnych elektronów; to materiały, w których brak elektronów przewodnictwa.

Bursztyn, futra i większość kamieni półszlachetnych są izolatorami, podobnie jest z drewnem, szkłem, plastikiem i gumą.

Nawet gdy wprowadzimy do izolatora dodatkowy ładunek, to on nie przemieszcza się, pozostając w danym miejscu na stałe. To dlatego izolatory doświadczają przyciągania i odpychania elektrostatycznego.
Ładunek nie może przepływać przez izolator, więc siły elektrostatyczne pochodzące od tego zlokalizowanego ładunku mogą działać przez długi czas.

Podział materiałów ze względu na właściwości elektryczne

Półprzewodniki → Materiały (*np. krzem, german*) pośrednie pomiędzy przewodnikami a izolatorami , posiadają specyficzne właściwości dzięki "pasmom energetycznym" w których elektrony (i dziury) mogą się poruszać. Ich właściwości sprawiają, że liczba nośników zależy od typu i zawartości domieszek (półprzewodniki domieszkowane).



Rys. Struktura kryształu kwarcu pozwala na formowanie gładkich płaszczyzn, które załamują światło, dzięki czemu kryształ nadaje się do wytwarzania biżuterii. Krzem, główny składnik kwarcu, może również występować w postaci krystalicznej. **Kryształy krzemu są półprzewodnikami samoistnymi**, na których opiera się światowy przemysł elektroniczny. Rys. źródło: Halliday,Resnick,Walker „Fundamentals of Physics".

- **Gęstość elektronów w materiałach:**

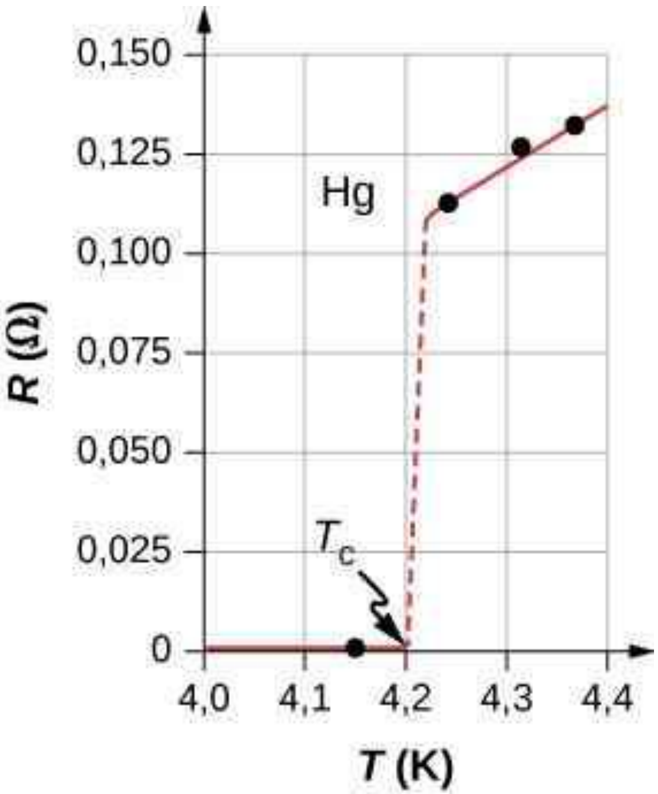
Przewodniki: **10^{23} elektronów przewodnictwa na cm^3**

Półprzewodniki: **$10^{10} – 10^{12}$ na cm^3**

Izolatory: **<1 na cm^3**

Podział materiałów ze względu na właściwości elektryczne

Nadprzewodniki → Materiał w którym**,** poniżej temperatury krytycznej , zanika opór elektryczny. Zerowy opór oznacza, że elektrony płyną przez nadprzewodnik bez strat energii – prąd wzbudzony w nadprzewodzącym pierścieniu płynie przez wiele lat bez dodatkowego zasilania. **Nadprzewodniki I rodzaju < 30K (niektóre metale i stopy metaliczne); nadprzewodniki II rodzaju (tzw. wysokotemperaturowe) > 30 K**



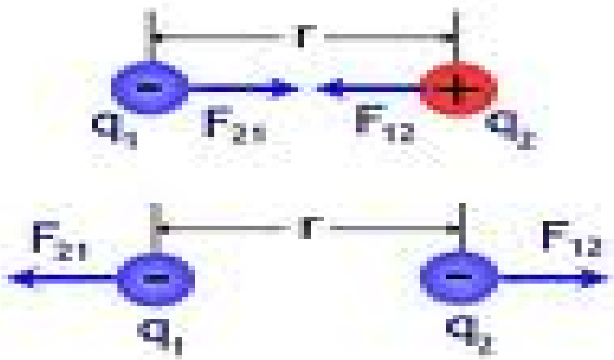
Rys. Przykład- rezystancja próbki rtęci wynosi zero w bardzo niskiej temperaturze, ponieważ jest ona nadprzewodnikiem do temperatury ok. 4,2 K. Powyżej temperatury krytycznej rezystancja nagle wzrasta, by następnie rosnąć prawie liniowo wraz z temperaturą.

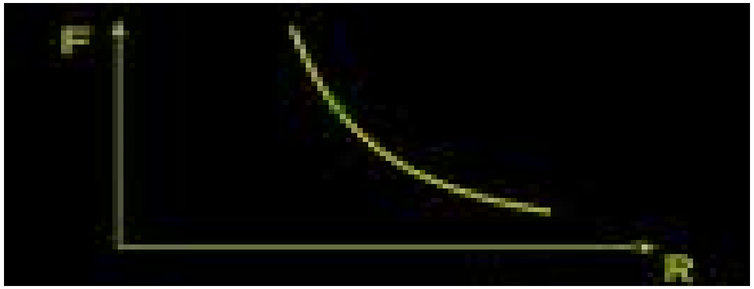
PRAWO COULOMBA

Charles A. Coulomb (1736-1806)

Zmierzył (w 1785) w sposób ilościowy przyciąganie i odpychanie elektryczne pomiędzy dwoma ładunkami.

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$





Rys. Siły działające między dwoma ładunkami.

gdzie: k- stała elektrostatyczna,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o\varepsilon_r} \approx 8.99\times10^9\, N\cdot m^2 / C^2$$

ε_o - przenikalność elektryczna próżni:

$$\varepsilon_o = 8.85418781762\times10^{-12} C^2 / N\cdot m^2$$

ε_r - przenikalność elektryczna ośrodka

ε-przenikalność elektryczna:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r$$

Przykład - PORÓWNANIE ODDZIAŁYWAŃ

Jaki jest stosunek siły oddziaływania elektrostatycznego do grawitacyjnego pomiędzy elektronem i protonem w atomie wodoru?

Dane: Masa elektronu $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \frac{N\,m^2}{kg^2}$ masa protonu $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg,

stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$, ładunek elementarny $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C ,

przenikalność elektryczna próżni $\varepsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{C^2}{N \cdot m^2}$.

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}{G\dfrac{m_p m_e}{r^2}} = \frac{e^2}{44\pi\varepsilon_0 G m_p m_e} = 2{,}77 \cdot 10^{44}$$

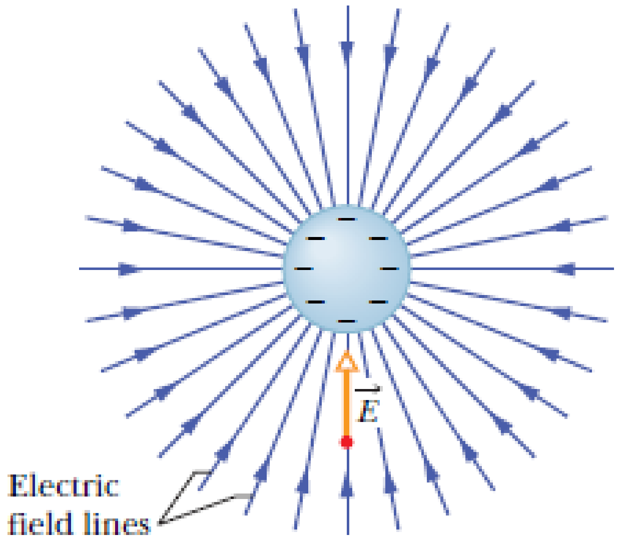
Jednostki pomijamy, by dać pojęcie o skali tych wielkości:

WNIOSEK:

Analizując oddziaływanie elektrostatyczne (elektryczne) ładunków , **oddziaływanie grawitacyjne** mas tych ładunków **może być pominięte**.

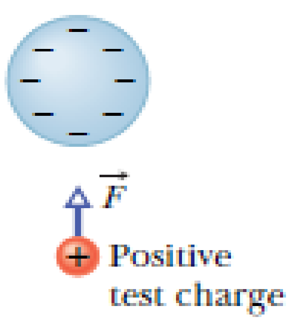
POLE ELEKTRYCZNE

Ładunek oddziałuje z polem wytworzonym przez drugi ładunek a nie oddziałują bezpośrednio ze sobą. Inaczej mówiąc oddziaływanie między ładunkami elektrycznymi jest oddziaływaniem na odległość.



- **Ładunek elektryczny *Q zmienia przestrzeń wokół siebie w taki sposób, że* każdy inny ładunek *q, który znajdzie się w tej przestrzeni dozna działania siły* kulombowskiej (ładunek *q znalazł się w polu elektrycznym wytworzonym przez* ładunek *Q).***

- **Ładunek Q wytwarzający pole elektryczne nazywamy źródłem pola.**



- **Jeśli ładunek wytwarzający pole elektryczne nie zmienia swej wartości w czasie i nie porusza się, to mówimy o polu elektrostatycznym.**

NATĘŻENIE POLA ELEKTRYCZNEGO

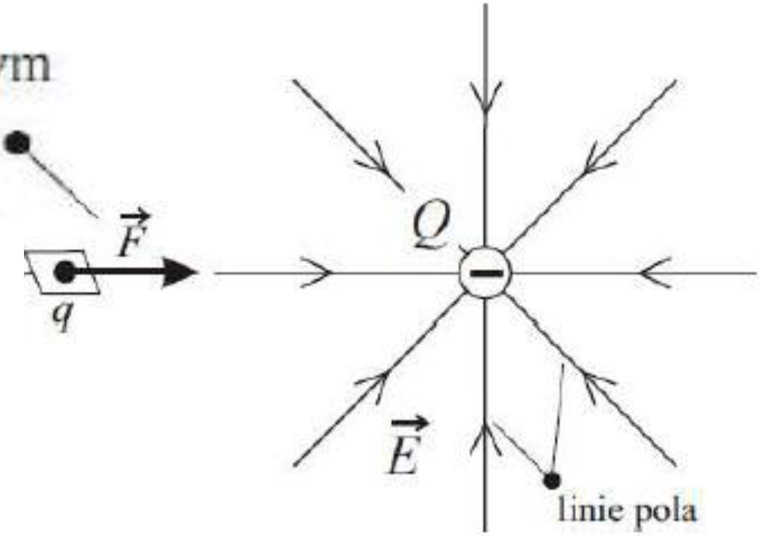
Wektor natężenia pola elektrostatycznego ładunku punktowego

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\left[\frac{N}{C}\right]$$

siła działająca na dowolny ładunek q umieszczony w polu elektrostatycznym wytwarzanym przez ładunek Q ma wartość

$$F = k\frac{|q\,Q|}{r^2} = |q|\,E$$



Wnioski:

1) **Pole elektryczne jest polem wektorowym**
2) **Matematyczny opis pola elektrycznego ma postać funkcji** $\vec{E}(x,y,z)$ **mającej dobrze określoną wartość w każdym punkcie przestrzeni.**
3) **Kierunek i zwrot natężenia pola elektrycznego jest taki sam jak siły działającej na dodatni ładunek próbny.**

Własności pola elektrycznego c.d.

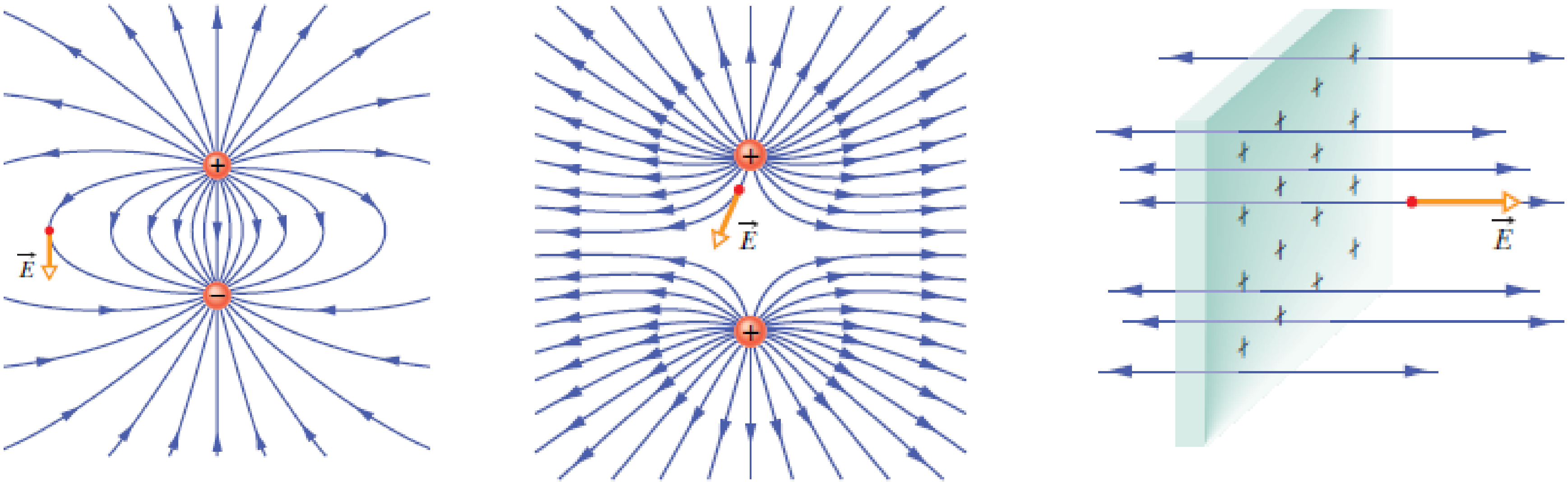
Pole elektryczne nie jest modelem abstrakcyjnym. Jest to twór fizyczny jak najbardziej realny.

Tabela 1. Przykładowe wartości wybranych pól elektrycznych

Lokalizacja	Natężenie pola elektrycznego [N/C]
Na powierzchni jądra uranu	3×10^{21}
W atomie wodoru, w odległości 5,3 x 10^{-11} m od jądra	5×10^{11}
Przebicie elektryczne w powietrzu	3×10^{6}
W pobliżu naładowanego bębna fotokopiarki	10^{5}
W akceleratorze wiązki elektronów w odbiorniku TV	10^{5}
W pobliżu naładowanego grzebienia plastikowego	10^{3}
W dolnej warstwie atmosfery	10^{2}
W przewodniku miedzianym w domowej instalacji elektrycznej	10^{-2}

Linie pola elektrycznego

Michael Faraday (XIX w.), twórca koncepcji pola elektrycznego, wyobrażał je sobie jako przestrzeń wypełnioną **„liniami sił**."



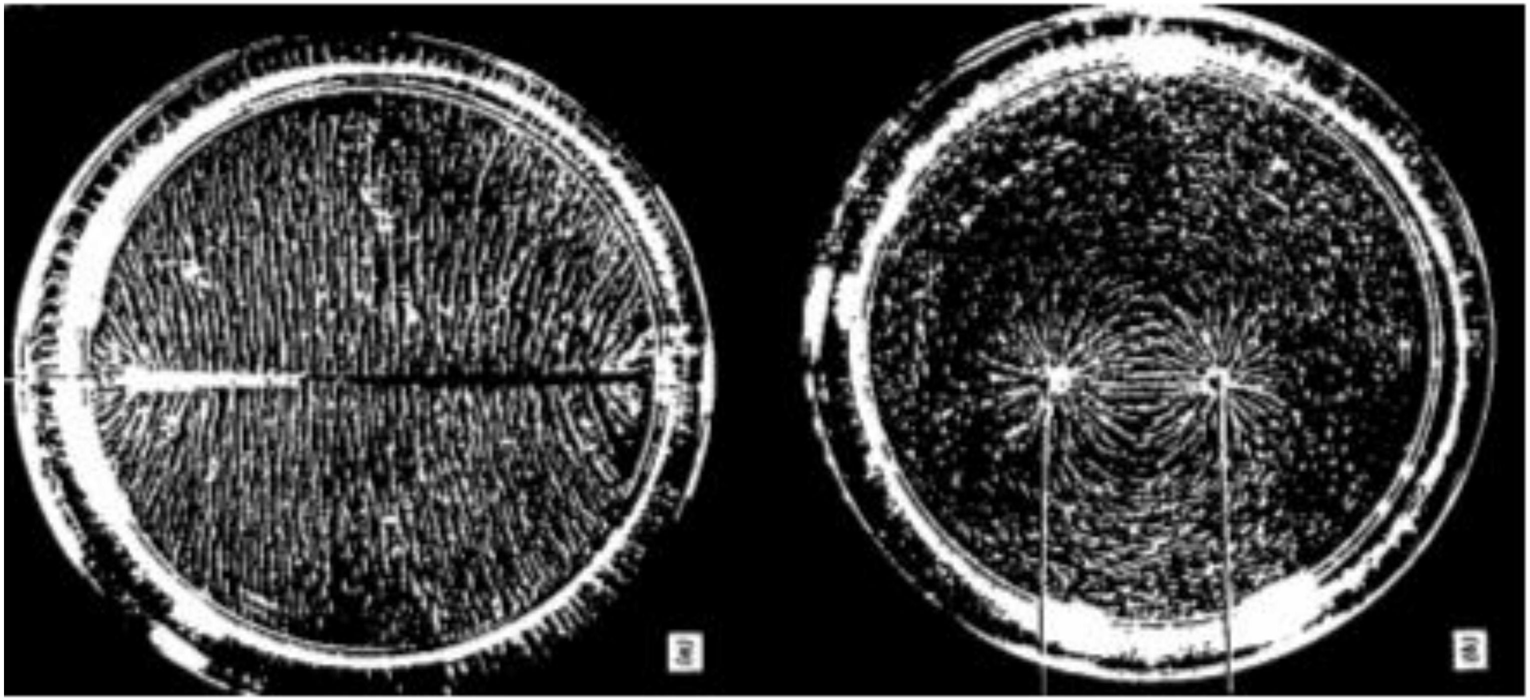
Rys. Linie natężenia pola elektrycznego wokół ładunków *Q* . *Źródło:* Halliday,Resnick,Walker „Fundamentals of Physics".

(1) Linie pola elektrycznego określają kierunek wektora *E* w dowolnym punkcie przestrzeni. Wektor *E* jest zawsze styczny do linii pola elektrycznego przechodzącej przez dany punkt.

(2) Linie pola elektrycznego zaczynają się w miejscach położenia ładunków dodatnich (lub w nieskończoności) , a kończą się na ładunkach ujemnych (lub w nieskończoności).

(3) Liczba, gęstość linii pola jest wprost proporcjonalna do wartości wektora E.

Linie pola elektrycznego- przykłady



Fotografie linii pola elektrycznego w otoczeniu **(a)** naładowanej płyty i **(b)** dwóch prętów naładowanych ładunkami o tych samych wartościach lecz z przeciwnymi znakami. Fotografie przedstawiają rozkład naelektryzowanych nasionek tworzących zawiesinę w cieczy będącej dobrym izolatorem.

Pole elektryczne układu ładunków punktowych

Stosując **zasadę superpozycji (** do obliczenia wypadkowej siły elektrostatycznej) znajdziemy pole elektryczne wytworzone przez **układ n ładunków punktowych:**

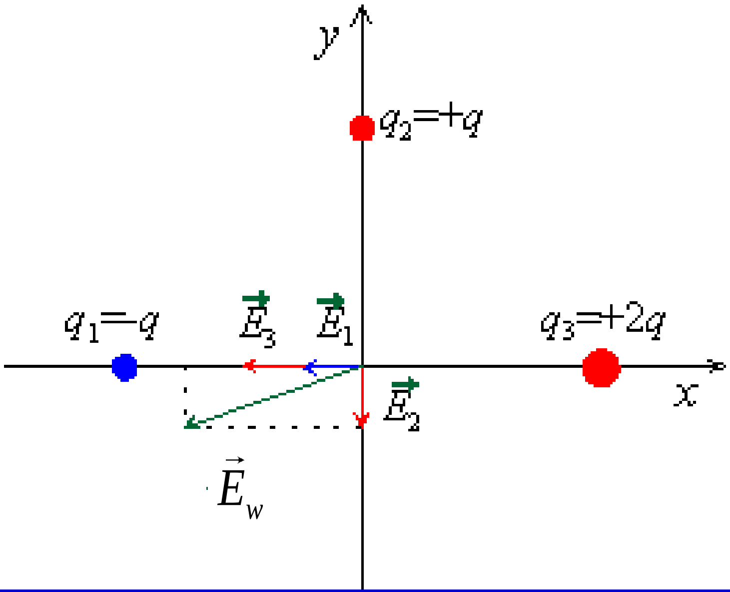
$$\vec{E}_w = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

(1) Obliczamy $\vec{E}_i$ - natężenie pola elektrycznego wytworzonego w danym punkcie przestrzeni przez ładunek punktowy q_i

(2) Dodajemy wszystkie wektory , aby obliczyć wypadkowe natężenie pola elektrycznego $\vec{E}_w$.

Przykładzik :)

Na rysunku przedstawiono trzy cząstki o ładunkach q_1, q_2, q_3, z których każda znajduje się w odległości d od początku układu. Jakie jest wypadkowe natężenie pola elektrycznego $\vec{E}_w$ w początku układu?



Przykład 1.- Natężenie pola elektrycznego

Dwa ładunki punktowe o wartościach Q_1=+3e i Q_2= - 5e (gdzie e jest ładunkiem elementarnym), znajdują się w odległości l =10 cm od siebie.

a) Jakie jest natężenie pola elektrycznego w połowie odległości pomiędzy nimi?

b)Jaka jest wartość natężenia pola elektrycznego w przypadku ładunków jednoimiennych?

c) W jakich punktach prostej przechodzącej przez ładunki natężenie pola jest równe zeru?

Dane:

$Q_1 = +3e$

$Q_2 = -5e$

$l = 0{,}1\,m$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}$

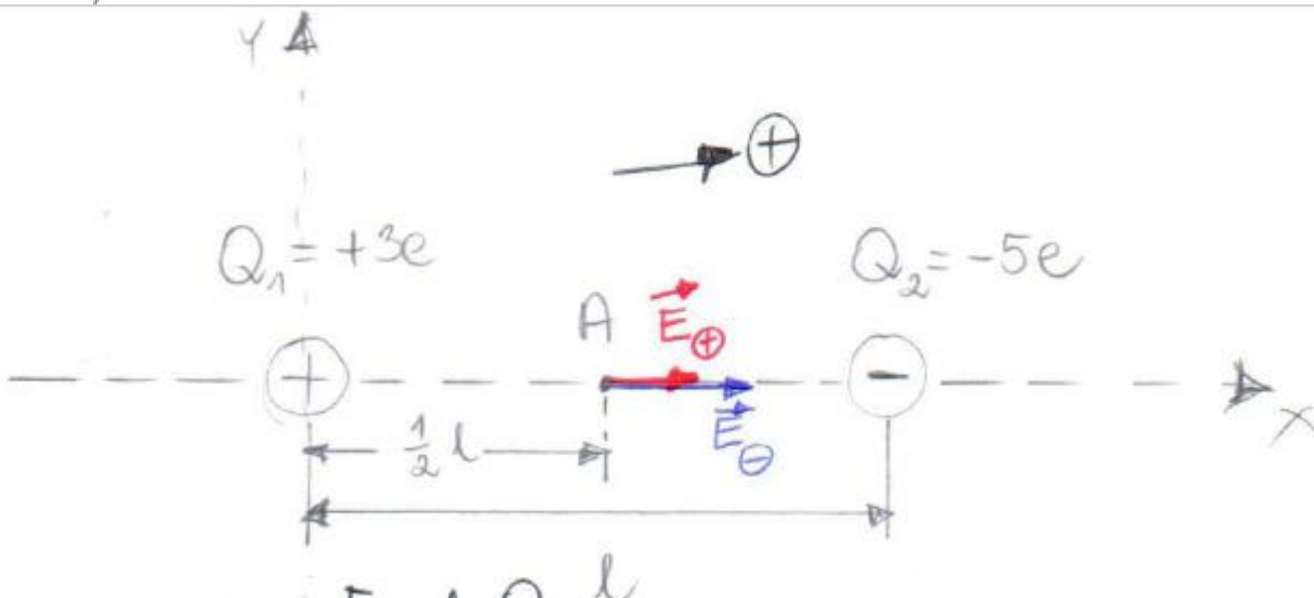
Szukane:

a) $E_{WA} = ?$

b) $E'_{WA} = ?$

c) $E_W = 0,\ r_1 = ?$

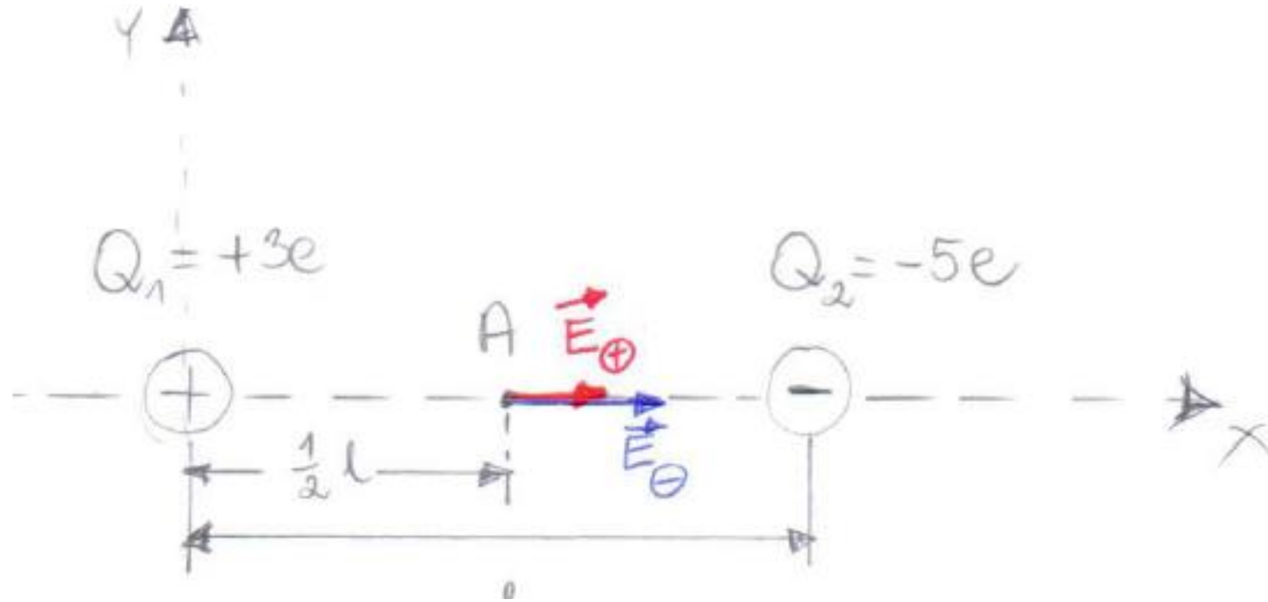
ad a)



$$E = \frac{F}{q} = k\frac{Q}{r^2}$$

Przykład 1.-rozwiązanie

ad a)

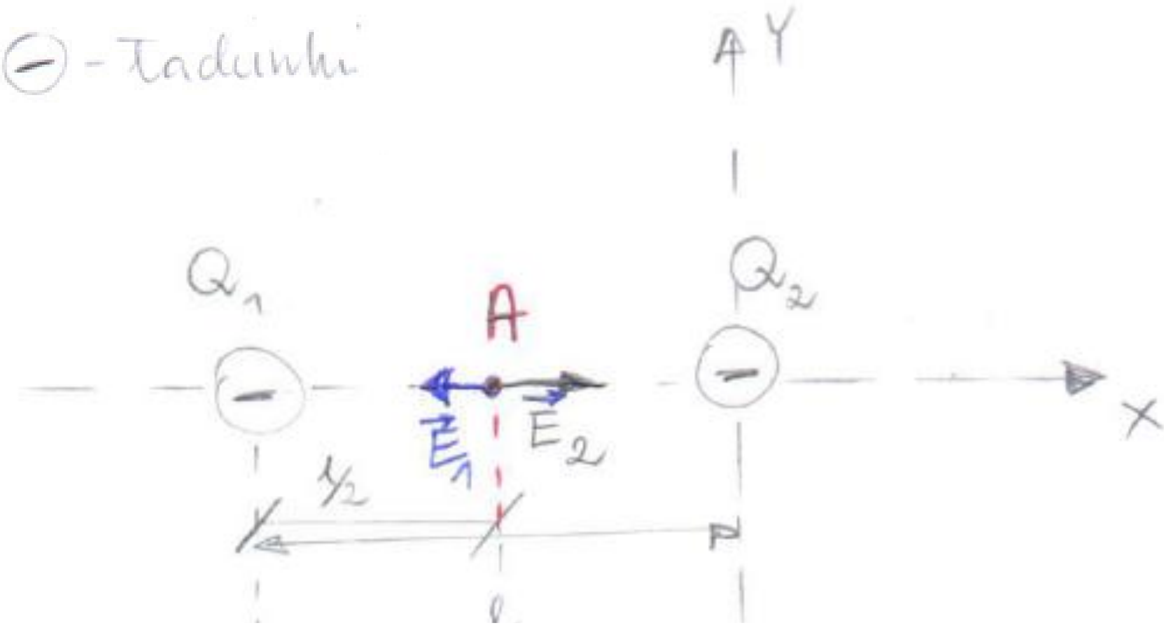


$$W.: \quad \vec{E}_{WA} = \vec{E}_{\oplus} + \vec{E}_{\ominus}$$

$$S: \quad E_{WA} = k\frac{Q_1}{(\frac{1}{2}l)^2} + k\frac{Q_2}{(\frac{1}{2}l)^2}$$

$$E_{WA} = k\frac{12e}{l^2} + k\frac{20e}{l^2} = k\frac{32e}{l^2}$$

ad b) np. ⊖ - ładunki



Wypadkowe natężenie pola elektrostatycznego w środku odległości dwóch ładunków jednoimiennych:

nat. pola wytw. przez Q_1

$$W: \quad \vec{E}'_{WA} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

natężenie wytworzone przez Q_2

$$S: \quad E'_{WA} = -E_1 + E_2$$

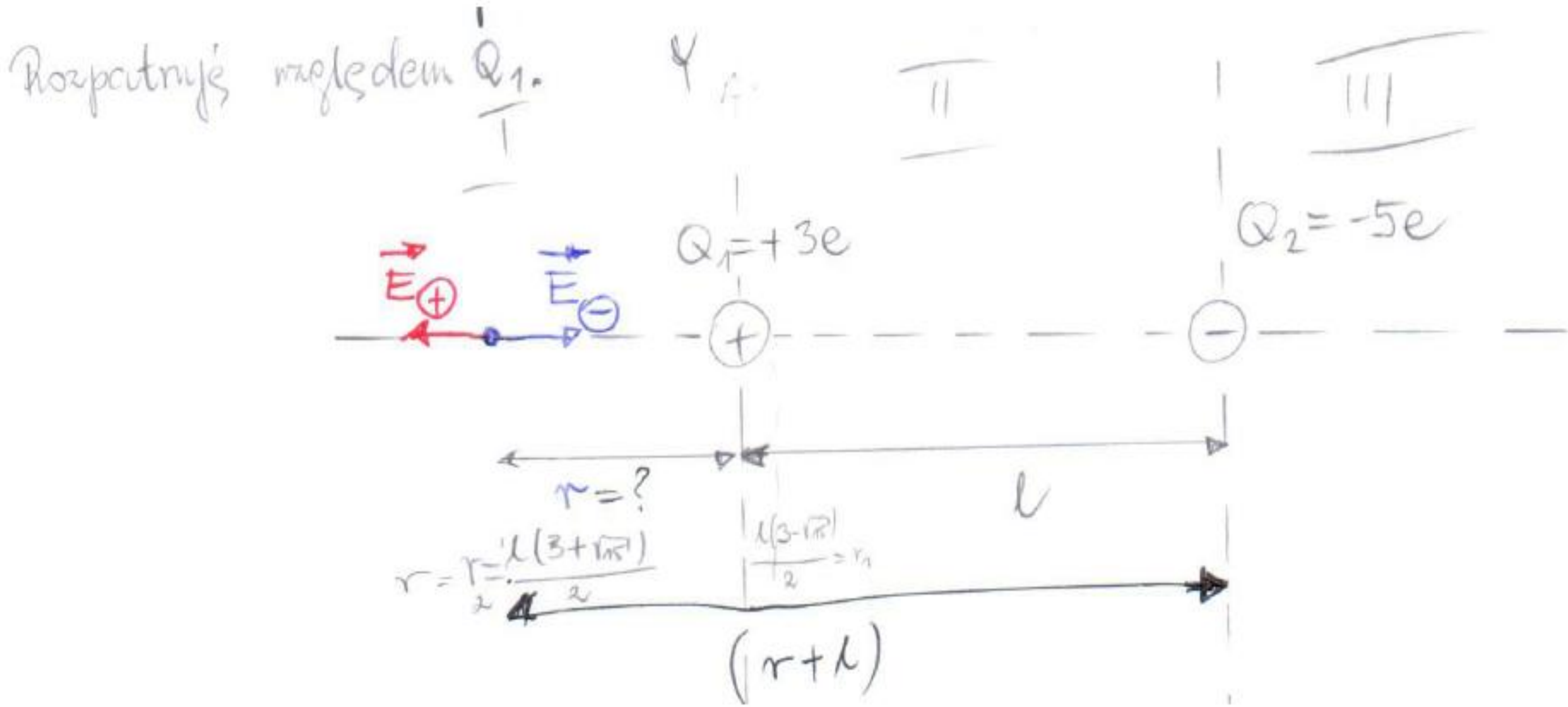
Przykład 1.-rozwiązanie ad. b)

Możemy napisać:

$$E'_{WA} = -k\frac{Q_1}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2} + k\frac{Q_2}{\left(\frac{1}{2}l\right)^2}$$

$$E'_{WA} = k\left(\frac{4Q_2}{l^2} - \frac{4Q_1}{l^2}\right) = k\left(\frac{20e}{l^2} - \frac{12e}{l^2}\right) = k\frac{8e}{l^2}$$

W jakich punktach prostej przechodzącej przez ładunki natężenie pola równa się zeru?



Natężenie wypadkowe może być równe zeru w obszarze I:

$$\vec{E}_W = 0$$

$$W: \quad \vec{E}_{\oplus} + \vec{E}_{\ominus} = 0 \quad ; \quad |E_{\oplus}| = |E_{\ominus}|$$

c.d. c)

gdzie: $E_{\oplus} = -k\dfrac{Q_1}{r^2} = -k\dfrac{3e}{r^2}$

$$E_{\ominus} = k\frac{Q_2}{(l+r)^2} = k\frac{5e}{(r+l)^2}$$

$$\cancel{k}\frac{3\cancel{e}}{r^2} = \cancel{k}\frac{5\cancel{e}}{(r+l)^2}$$

$$3(r+l)^2 = 5r^2$$

$$3r^2 + 6rl + 3l^2 = 5r^2$$

$$2r^2 - 6lr - 3l^2 = 0$$

$$\Delta = 36l^2 + 24l^2 = 60l^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2l\sqrt{15}$$

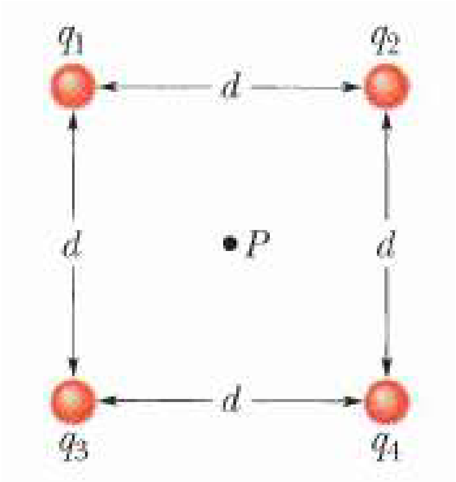
$$r_1 = \frac{6l - 2l\sqrt{15}}{4} = \frac{\cancel{2}l(3-\sqrt{15})}{\cancel{4}\,2} = \frac{l(3-\sqrt{15})}{2}$$

, $r_1 \cong -0{,}044\text{m}$

$$r_2 = \frac{l(3+\sqrt{15})}{2} \Rightarrow r_2 \approx 0{,}34\ \text{m}$$

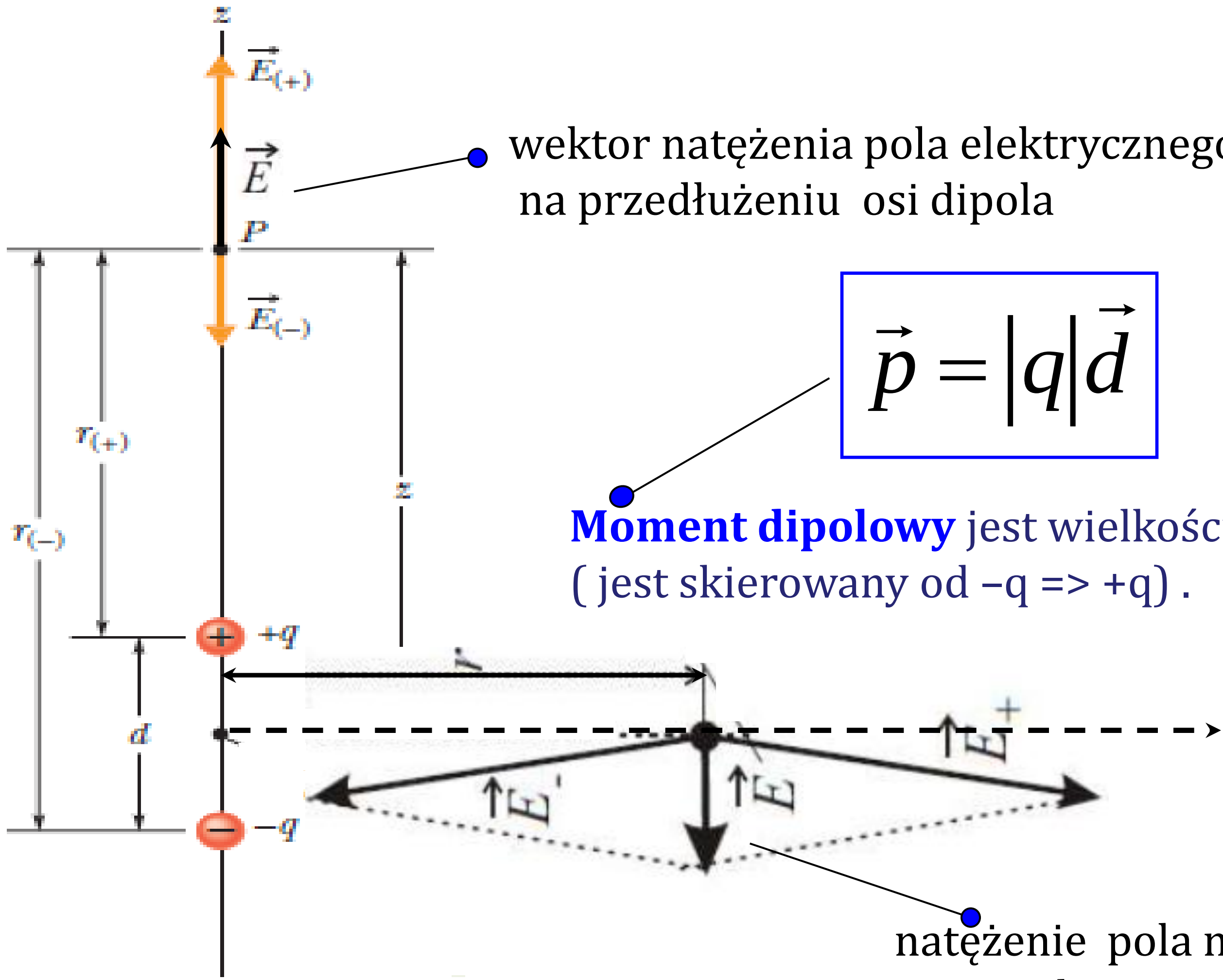
Przykład 2 – samodzielnie

Cztery swobodne, równe, dodatnie ładunki punktowe *e* umieszczono w wierzchołkach kwadratu okrawędzi d . Jaki ładunek należy umieścić w środku kwadratu, aby układ był w równowadze?



Pole elektryczne dipola elektrycznego

Dipol elektryczny- tworzą dwa ładunki o równej wartości ***q*** i przeciwnych znakach znajdujące się w odległości ***d*** od siebie.



wektor natężenia pola elektrycznego na przedłużeniu osi dipola

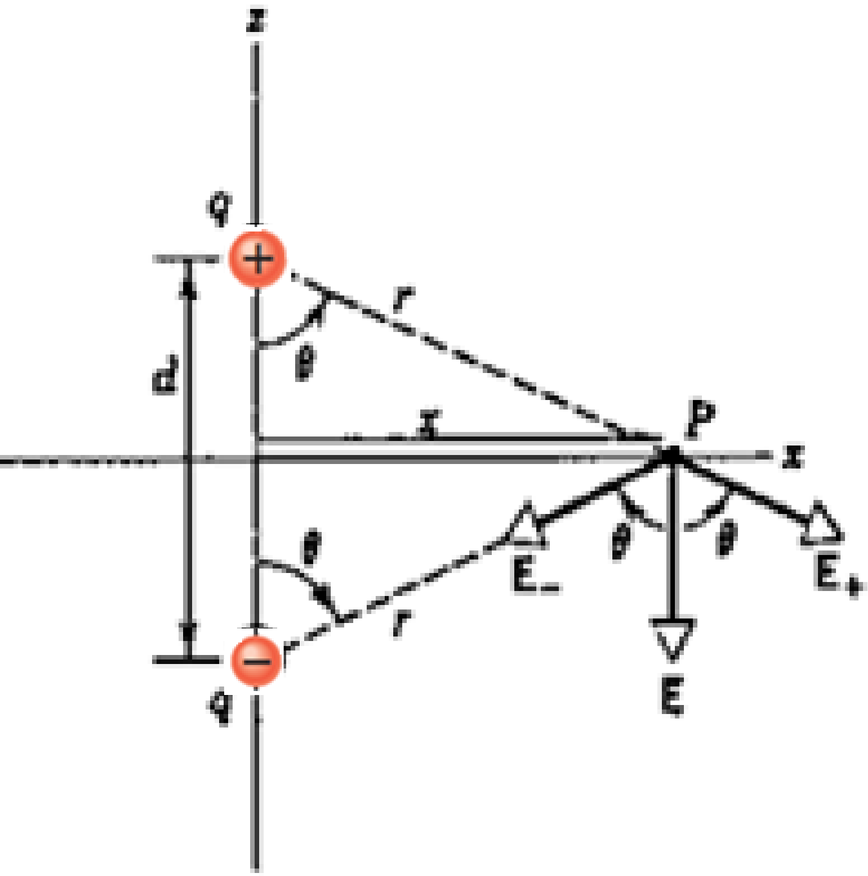
$$\boxed{\vec{p} = |q|\vec{d}}$$ [1C•m]

Moment dipolowy jest wielkością wektorową.
(jest skierowany od −q => +q) .

natężenie pola na symetralnej osi dipola

Przykład 3 - Pole elektryczne dipola elektrycznego

Korzystając z zasady superpozycji oddziaływań, obliczyć wartość natężenia pola elektrycznego (***E***) w punkcie **P** (rys.), leżącym na osi **x** w dużej odległości od dipola (**x>>d**).



W punkcie P wypadkowy **wektor natężenia** $\vec{E}$:

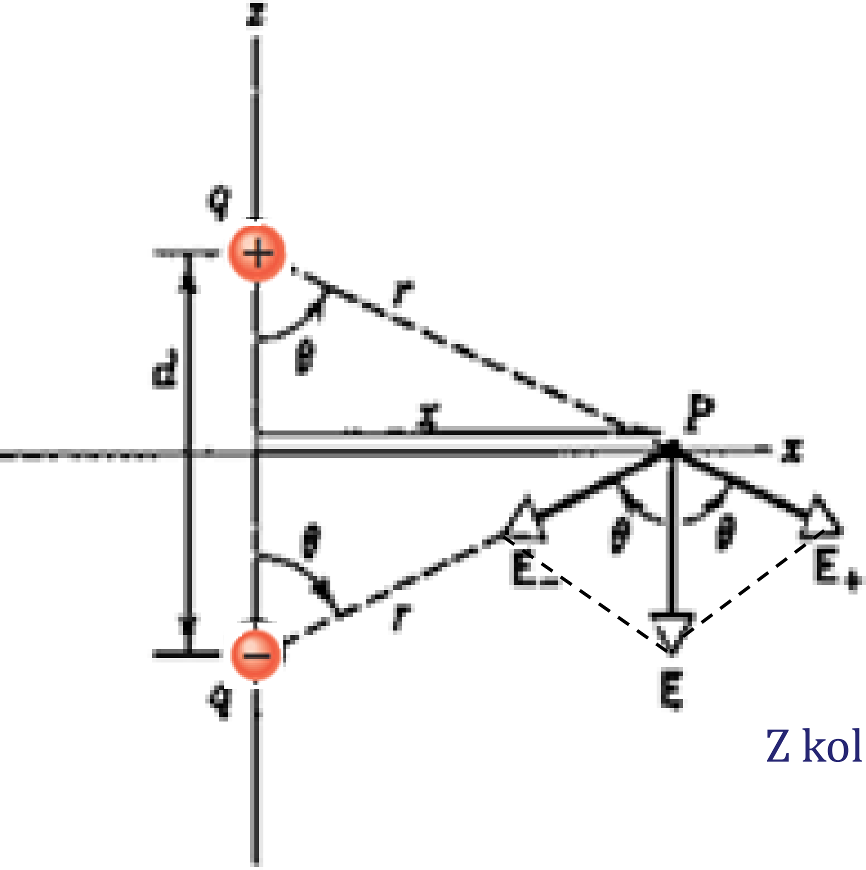
$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Wartości natężenia pola elektrycznego pochodzącego od poszczególnych ładunków w punkcie P, w odległości x od początku układu współrzędnych są jednakowe (gdyż odległości ładunków są takie same):

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Pole elektryczne dipola elektrycznego c.d.

Aby wyznaczyć **wartość wektora wypadkowego** $E = \left|\vec{E}\right|$, zapiszemy tw. cosinusów (rys.):



$$E_-^2 = E_+^2 + E^2 - 2EE_+\cos\theta$$

Korzystając z tego, że $E_+ = E_-$, mamy

$$0 = E^2 - 2EE_+\cos\theta$$

Zatem długość wypadkowego natężenia:

$$E = 2E_+\cos\theta$$

Z kolei (patrz rys.): $\cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}d}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + x^2}}$

Po podstawieniu otrzymujemy wynik :

$$E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\frac{\frac{1}{2}d}{\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}d\right)^2}} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{\left(x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{x^3}}$$

Uwzględniając zał.(**x>>d**

Pole elektryczne dipola elektrycznego

Uwaga:

Wielkością charakteryzującą pole elektryczne dipola jest ***moment dipola p =qd [1C m]*** **.**

Zatem możemy zapisać:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{\left(x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right)^{3/2}}$$

Dla odległości x >> d, otrzymujemy:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{x^3}$$

Przykład 2 (do samodzielnego rozwiązania dla chętnych:)

Obliczyć wartość natężenia pola elektrycznego (***E***) w punkcie **P** leżącym na prostej *(patrz rys. P. 1),* w odległości *r* od środka dipola ((**r>>d**).

Odp.

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2p}{r^3}$$

Pole elektryczne od ładunków o rozkładzie ciągłym.

- Rozważając **dużą liczbę jednorodnie rozłożonych ładunków elementarnych używamy** następującą **procedurę,** aby znaleźć **E(x,y,z)** pochodzące od takiego układu:

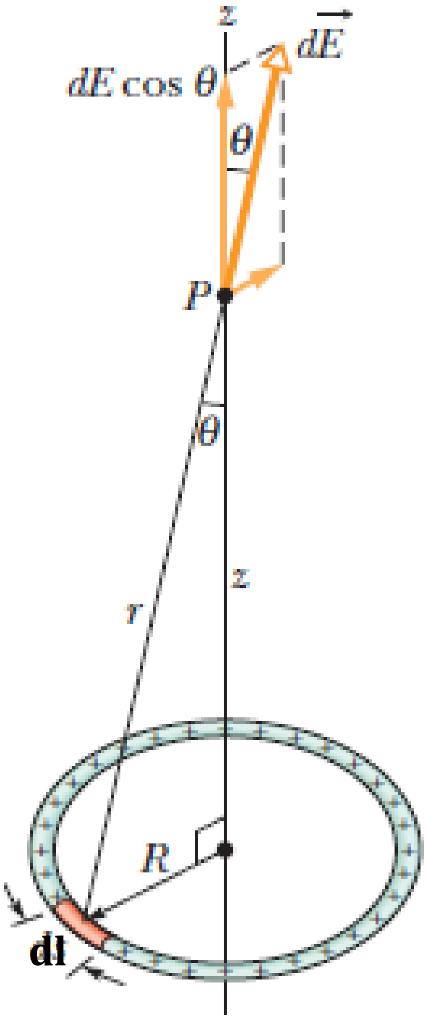
  (a) podzielić rozkład na nieskończenie małe składowe ***dq***
  (b) każda składowa wytwarza pole $d\vec{E}$ w punkcie P(x,y,z)
  (c) pole w punkcie P można wyznaczyć przy pomocy zasady superpozycji przez dodawanie kolejnych wkładów od poszczególnych składowych ładunku.

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \hat{i}\int dE_x + \hat{j}\int dE_y + \hat{k}\int dE_z$$

- Gdy mamy do czynienia z ciągłym rozkładem ładunków, to wygodnie jest wyrazić **rozkład ładunku elektrycznego za pomocą** ***gęstości ładunku (Tab.)*** .

Nazwa	Symbol	SI Unit
Ładunek	q	C
Liniowa gęstość Ładunku	λ	C/m
Powierzchniowa gęstość ładunku	σ	C/m^2
Objętościowa gęstość ładunku	ρ	C/m^3

Przykład 1. Jakie jest natężenie pola elektrycznego ***E*** w punkcie ***P***, w odległości ***z*** od płaszczyzny pierścienia, leżącym na osi jednorodnie naładowanego pierścienia?



Pierścień naładowany ładunkiem dodatnim.

Element różniczkowy ładunku ***dq*** zajmuje pewną długość ***dl*** i wytwarza pole elektryczne $d\vec{E}$ w punkcie P (rys.).

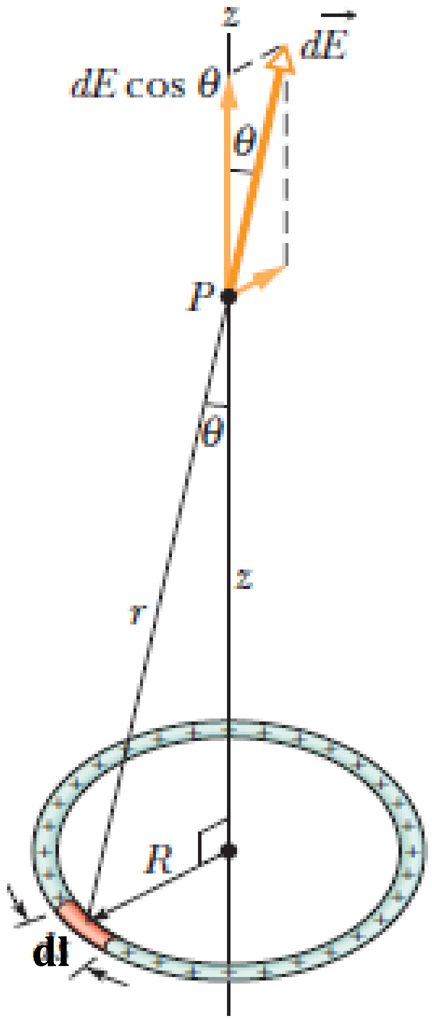
Uwzględniając liniową gęstość ładunku: $\lambda = \frac{dq}{dl}$,

ten mały element ***dl*** ma ładunek o wartości: $dq = \lambda dl$

wytwarza $d\vec{E}$ o wartości : $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{r^2}$

Uwzględniając r (rys.) : $dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{\left(z^2 + R^2\right)}$

Uwzględniam teraz wszystkie wektory składowe $d\vec{E}$ równoległe do osi ***z*** : $dE_z = dE\cos\theta$.



Z rys. $\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}.$

Uwzględniając wzory (10.15) i (10.16) :

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{z\lambda}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}dl$$

Aby wyznaczyć E, należy scałkować po obwodzie pierścienia:

$$E = \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R} dl =$$

$$= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

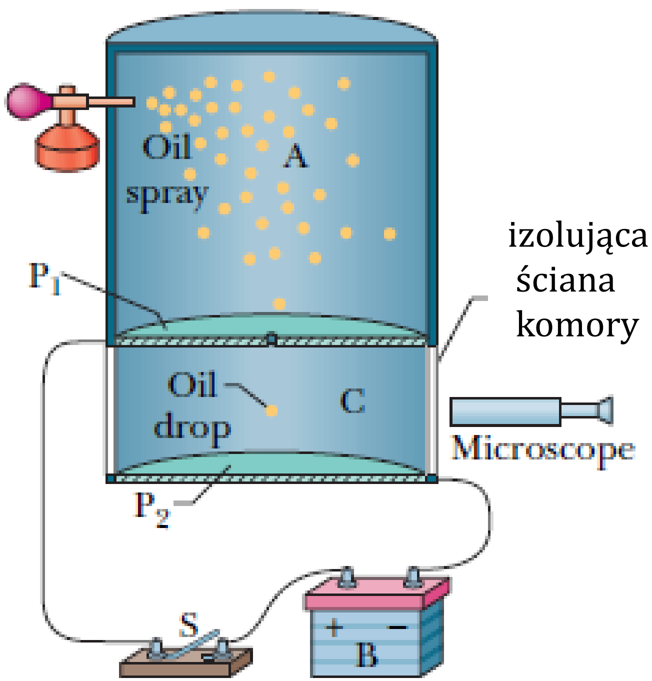
Ponieważ całkowity ładunek q: $q = \lambda 2\pi R$

Otrzymujemy **rozwiązanie:** $\boxed{E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}}$

W przypadku **dla z >> R :** $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z^2}$

Ładunek punktowy w polu elektrycznym

Co stanie się z naładowaną cząstką , gdy znajdzie się w polu elektrycznym, wytworzonym przez inne stacjonarne lub powoli poruszające się ładunki?



Rys. Aparatura do pomiaru ładunku elementarnego ***e*** w doświadczeniu Millikana. źródło: Halliday,Resnick,Walker „Fundamentals of Physics”.

Doświadczenie to jest dowodem skwantowania ładunku ***q =ne*** . Częściowo za to określenie wielkości ładunku Millikan w 1923r .otrzymał nagrodę Nobla.

Na naładowaną cząstkę będzie działać siła elektrostatyczna, określona następującym wzorem:

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

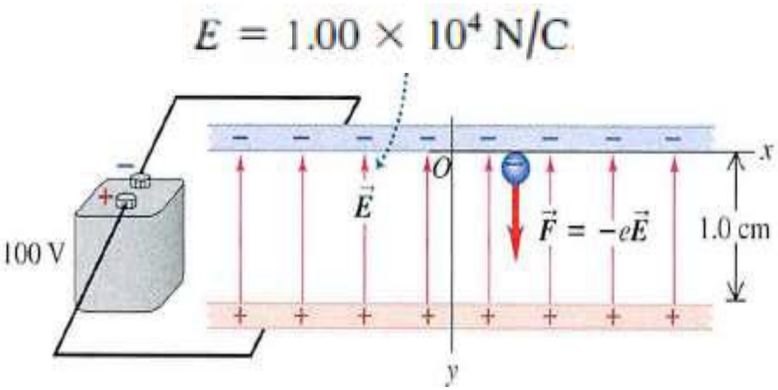
gdzie ***q*** jest ładunkiem cząstki , a $\vec{E}$ jest natężeniem pola elektrycznego (tzw. *pola zewnętrznego*), wytworzonego przez pozostałe ładunki w miejscu w którym znajduje się cząstka.

Siła elektrostatyczna F, działająca na cząstkę umieszczoną w zewnętrznym polu elektrycznym o natężeniu *E* ,**ma kierunek natężenia E**, jeśli ***ładunek cząstki q jest dodatni***, i ***ma przeciwny kierunek, jeśli ładunek q jest ujemny.***

Ruch ładunku w polu elektrycznym

→ **Jak skierowana jest siła elektrostatyczna działająca na elektron i pochodząca od pola elektrycznego o natężeniu przedstawionym na rysunku?**

a)W którym kierunku elektron będzie przyspieszany, jeśli przed wejściem w obszar pola elektrycznego poruszał się równolegle do osi y (rys.)?



Na ciało o masie m i ładunku **q** umieszczone w polu elektrycznym działa siła elektrostatyczna $\mathbf{F_e}$ równa:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

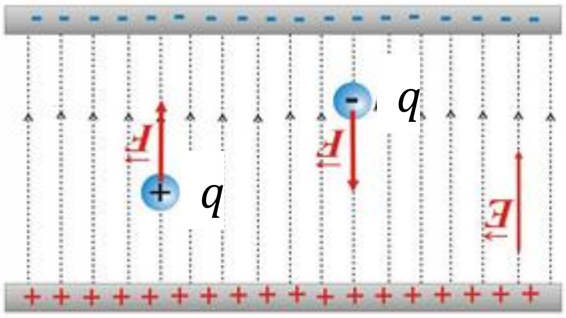
Nasz ładunek ***q= - e***, stąd siła $\boldsymbol{F_e}$ ma zwrot przeciwny do E.

Ładunek będzie poruszał się równolegle do linii pola z przyspieszeniem:

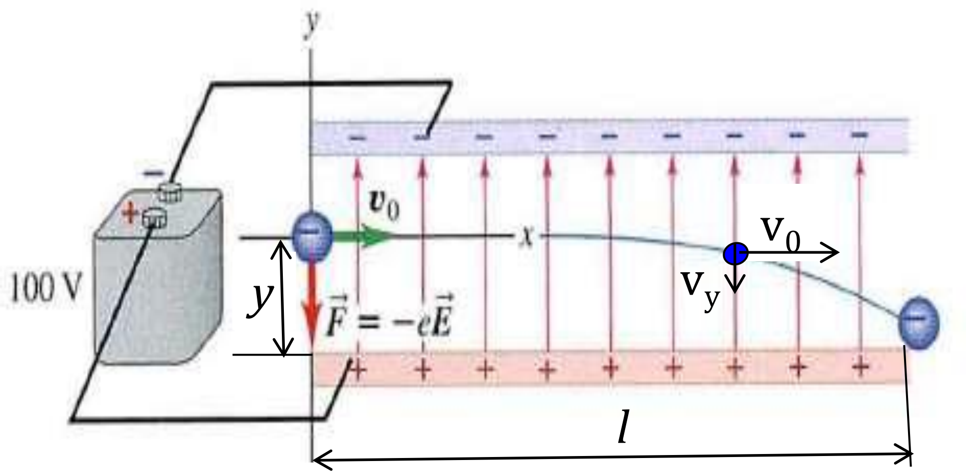
$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

gdzie: m- masa ładunku q umieszczonego w polu elektrycznym.

Zwrot wektora ***a*** będzie zależał od ładunku.



b) W którym kierunku elektron będzie przyspieszany, jeśli wpada w obszar pola elektrycznego pod kątem prostym do linii E ?
Czy jego prędkość wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie stała?



Oznaczenia:

v_0- *prędkość początkowa* ;
v_y – *pionowa składowa prędkości;*
y – wysokość początkowa;
l – zasięg; d- odległość między okładkami kondensatora;
t- czas potrzebny na pokonanie obszaru między płytami.

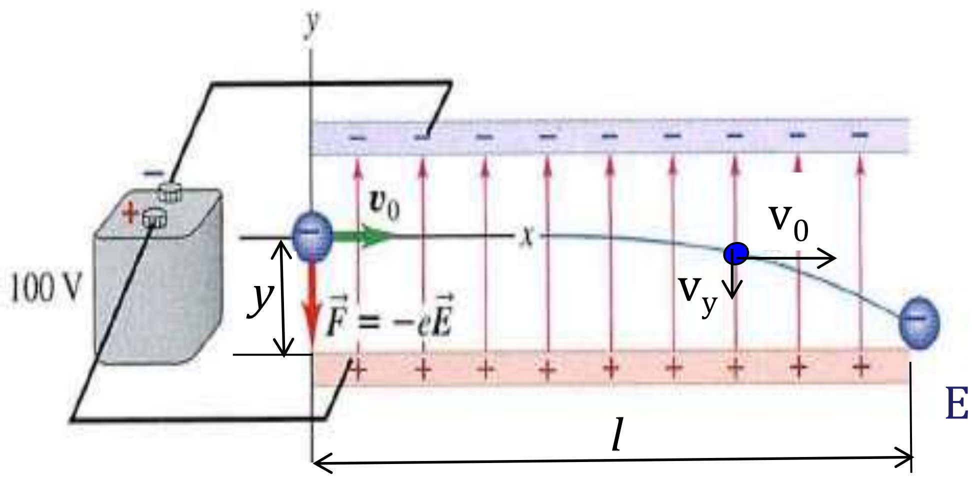
Ładunek *q =(-e) przesuwając się wzdłuż osi x z prędkością* v_0=const. ($\boldsymbol{a_x=0}$), zaczyna odchylać się ze stałym przyspieszeniem a_y:

$$a_y = \frac{F}{m} = \frac{(-e)E}{m}$$

Ruch ładunku w polu elektrycznym c.d.

$$a_y = \frac{(-e)E}{m}$$

Niech ***t***- oznacza czas potrzebny elektronowi na przejście obszaru między płytami.



Po czasie ***t*** mamy :

$$l = v_0 t \quad , a \quad y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

Eliminując ***t*** z równań i podstawiając za a_y (*) :

$$y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{mv_0^2} l^2$$

Torem ładunku jest parabola.

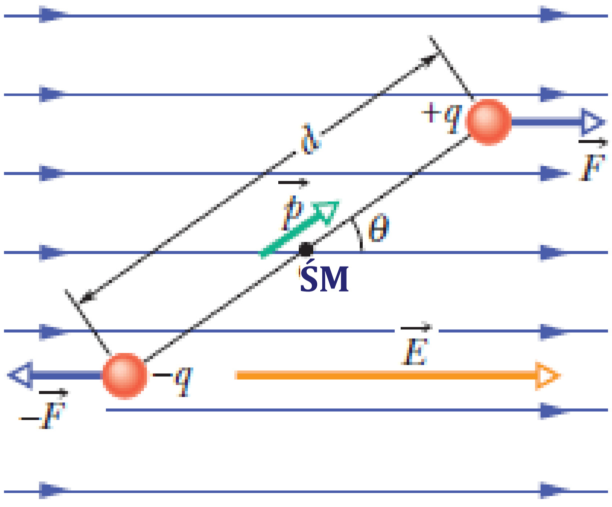
A co z prędkością ?

$$v_y = a_y t = \frac{(-e)El}{mv_0} \quad , \quad zatem \;\; v = \sqrt{v_0^2 + \frac{(-e)^2 E^2 l^2}{m^2 v_0^2}}.$$

Dipol w jednorodnym zewnętrznym polu elektrycznym

Moment dipolowy $\vec{p}$ tworzy kąt θ z kierunkiem natężenia pola $\vec{E}$.

(a)



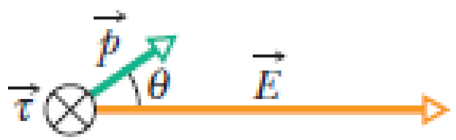
Na naładowane końce dipola działają siły w przeciwnych kierunkach:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Mające taką samą wartość, a zatem $F_w = 0$ *i ŚM dipola* się nie porusza.

- Jednak siły działające na naładowane końce wytwarzają moment siły względem ŚM.

(b)



Korzystając ze wzoru: $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right|\sin\boldsymbol{\theta}$

Wartość wypadkowego momentu siły:

$$M_w = Fx\sin\boldsymbol{\theta} + F(d-x)\sin\boldsymbol{\theta} = Fd\sin\boldsymbol{\theta}$$

lub $\boldsymbol{M} = pE\sin\theta.$

Rys. (a) Dipol elektryczny w jednorodnym polu elektrycznym,
(b) Pole o natężeniu ***E*** działa momentem siły o wartości ***M*** na dipol.

Dipol jest przekręcany do wyrównania.

W postaci wektorowej moment siły działający na dipol: $\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$

Indukcja pola elektrycznego

Jak będzie wyglądało pole elektryczne w ośrodkach charakteryzujących się różną od jedności względną przenikalnością elektryczną?

W takich ośrodkach pole elektryczne definiujemy poprzez wektor indukcji pola elektrycznego D :

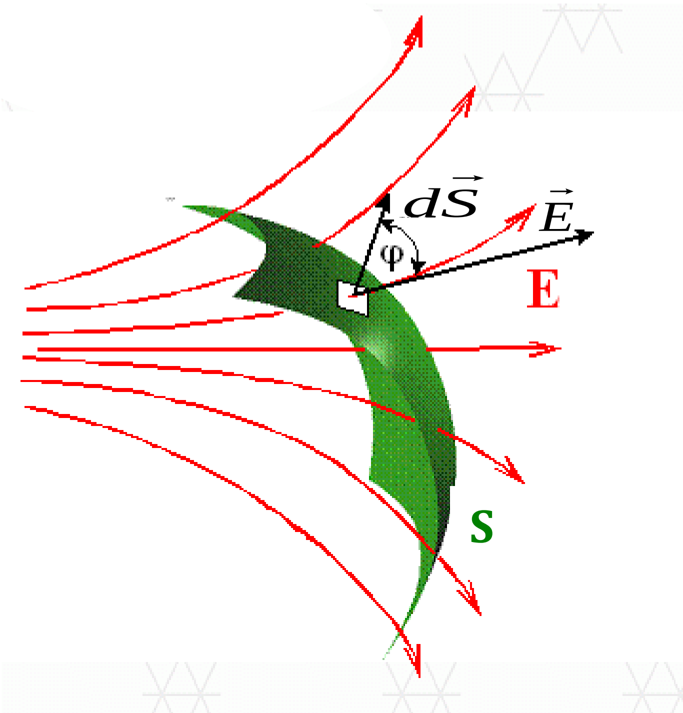
$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}} \qquad [1\frac{C}{m^2}]$$

gdzie: D – wektor indukcji pola elektrycznego, E – wektor natężenia pola elektrycznego, ε - przenikalność elektryczna ośrodka $\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r}$

$\varepsilon_o = 8.85418781762 \times 10^{-12} C^2 / N \cdot m^2$ - przenikalność elektryczna w próżni;

ε_r - względna przenikalność elektryczna ośrodka (stała bezwymiarowa) (określa ile razy przenikalność danego ośrodka ε jest większa od przenikalności elektrycznej w próżni) .

Strumień pola elektrycznego opisywany wektorem $\vec{E}$ przechodzącym przez daną powierzchnię S :



$$\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left|\vec{E}\right|\left|d\vec{S}\right| \cos\varphi$$

φ **- kąt zawarty między wektorem $\vec{E}$, a wektorem $d\vec{S}$, normalnym do powierzchni *S*.**

Całkowity strumień pola elektrycznego:

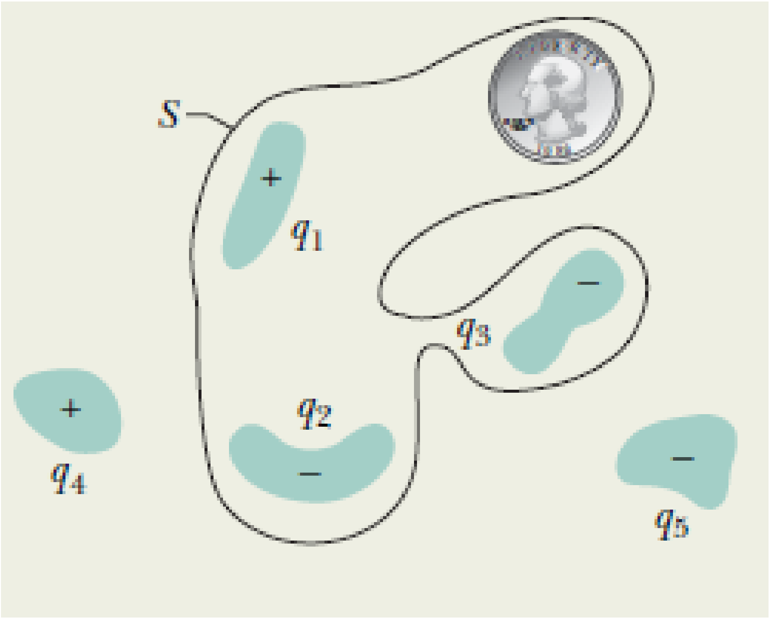
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad (*)$$

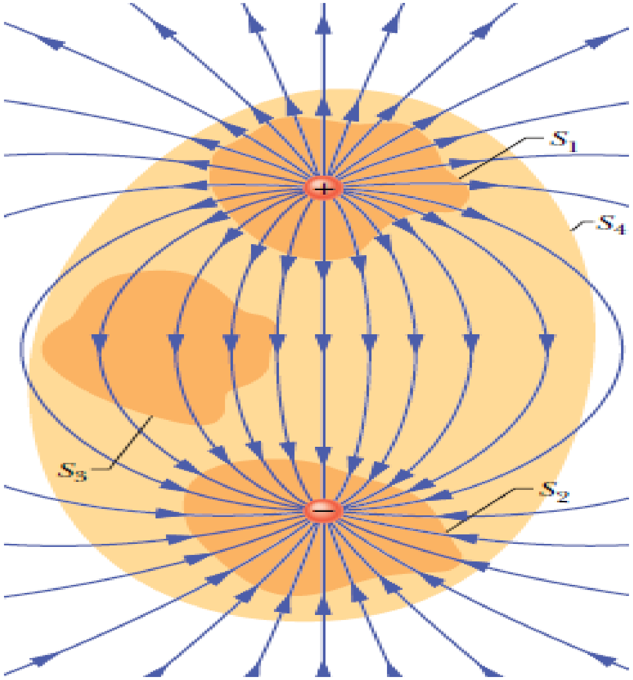
Strumień elektryczny Φ przenikający przez powierzchnię ***S*** jest proporcjonalny do całkowitej liczby linii pola elektrycznego, przechodzących przez tę powierzchnię.

Pole elektryczne od wielu ładunków

Stosując zasadę superpozycji: **natężenie pola elektrycznego od wielu źródeł można przedstawić jako sumę natężeń pola od pojedynczych źródeł.**

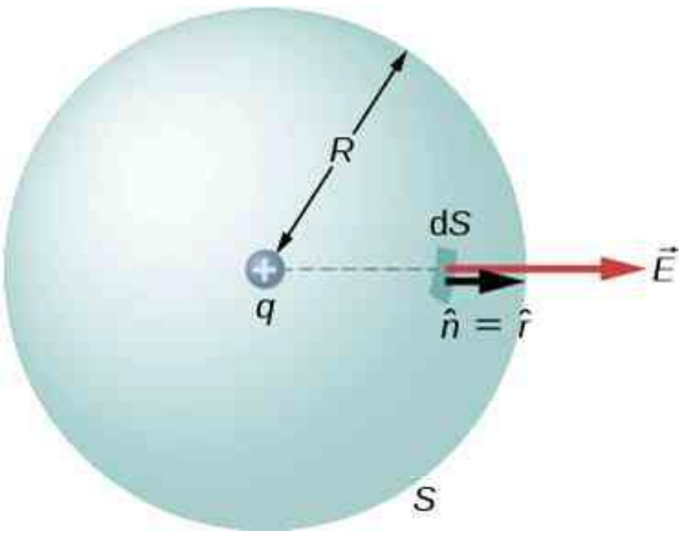
$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \oint_S (\vec{E}_1 + \ldots + \vec{E}_n)\, d\vec{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} + \ldots + \frac{q_n}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$





Przykład - strumień pola elektrycznego

Znajdź wyrażenie na strumień pola elektrycznego przechodzący przez powierzchnię sferyczną (A) w odległości ***R*** *od środka ładunku punktowego* ***q*** (w próżni).



Korzystając z zależności (*), otrzymujemy:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \oint_S dS =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Stąd, całkowity strumień przechodzący przez naszą zamkniętą powierzchnię sferyczną wynosi :

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} \left[\frac{N \cdot m^2}{C} \right]}$$

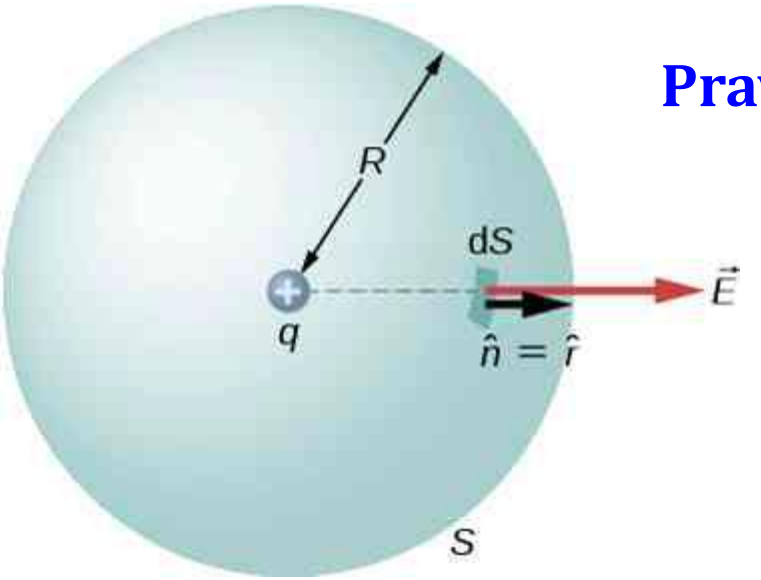
$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2$
Ładunek elektryczny $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C
Masa elektronu $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg

Strumień jest niezależny od rozmiaru powierzchni sferycznej

PRAWO GAUSSA

Prawo Gaussa opisuje związek między strumieniem Φ pola elektrycznego, przenikającym przez zamkniętą powierzchnię (powierzchnię Gaussa) i całkowitym ładunkiem $q_{wewn.}$ zawartym wewnątrz tej powierzchni.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)



Prawo Gaussa dla pola elektrycznego:

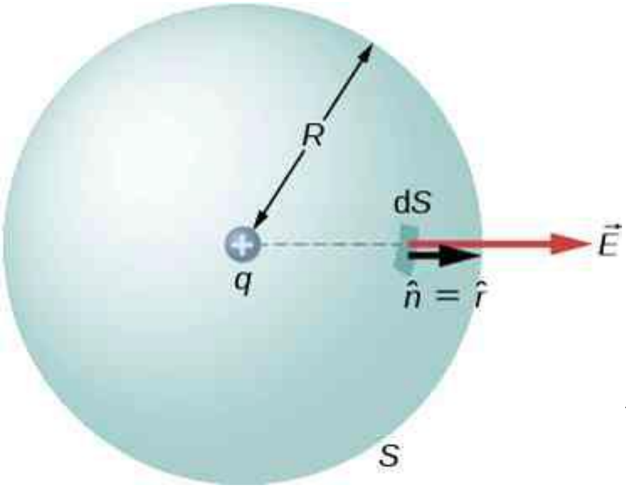
$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

lub $\varepsilon_o \Phi_E = q,$

Strumień wektora natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą S jest proporcjonalny do ładunku zawartego wewnątrz tej powierzchni .

Prawo Gaussa a prawo Coulomba

Przykład. Wykazać, że prawo Coulomba wynika z prawa Gaussa. Przyjąć ,że *E =const.*



Z prawa Gaussa strumień przechodzących przez sferę o promieniu *r*, otaczającą ładunek *Q* (rys.) :

$$\Phi = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q \qquad (**)$$

bliczymy teraz lewą stronę powyższego równania, mamy:

$$L = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E \oint_S dS = \varepsilon_0 E 4\pi R^2 = \varepsilon_0 \frac{F}{q} 4\pi R^2$$

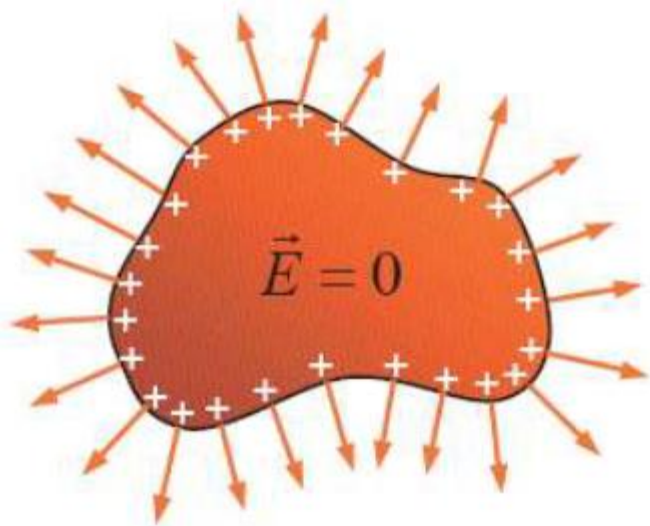
Przyrównując powyższe wyrażenie z prawą stroną równania (**), otrzymujemy

Prawo Coulomba:

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{R^2}}$$

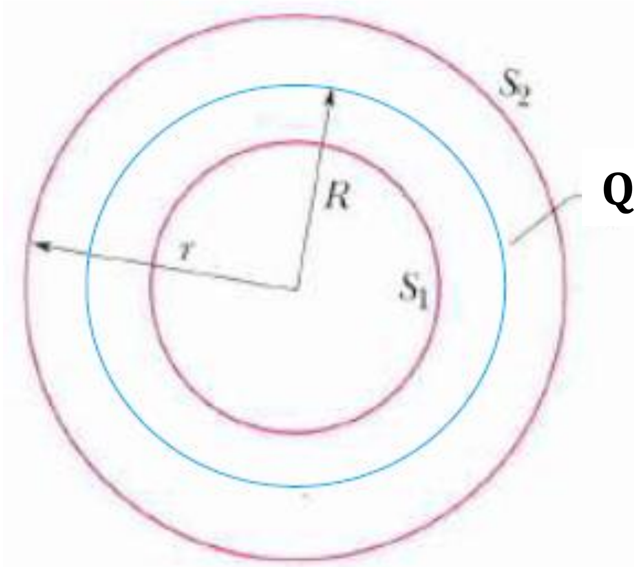
Izolowany przewodnik naładowany.

Jeśli nadmiarowy ładunek zostaje umieszczony na izolowanym przewodniku, to ten ładunek przesuwa się całkowicie na powierzchnię przewodnika. We wnętrzu przewodnika nie ma żadnego nadmiarowego ładunku.



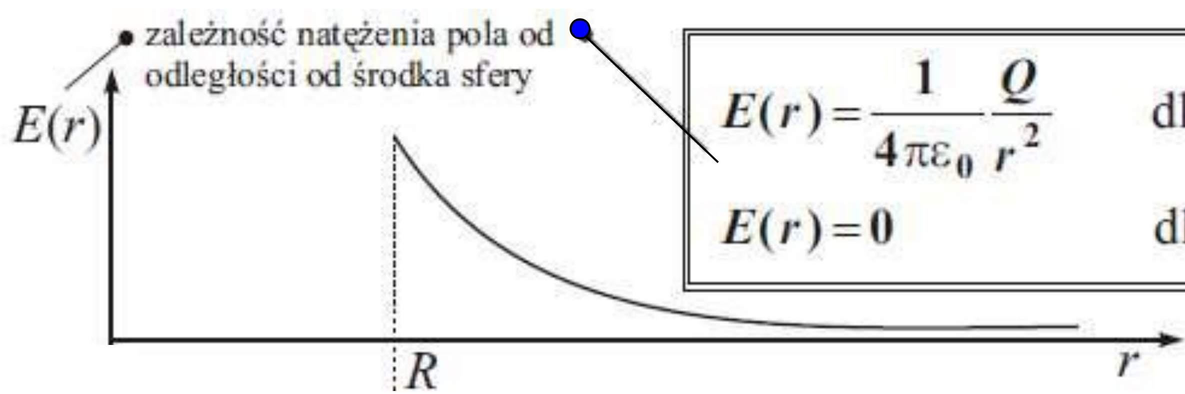
Wewnętrzne pole elektryczne występuje w przewodniku , gdy przewodnik jest ładowany. Dodawany ładunek szybko rozmieszcza się w ten sposób, że wypadkowe natężenie pola eklektycznego- wektorowa suma natężeń pól elektrycznych, wytworzonych przez wszystkie ładunki zarówno wewnątrz jak i na zewnątrz przewodnika- jest równe zeru. Wówczas ruch ładunków ustaje, ustala się wtedy stan równowag w którym wewnętrzne $\vec{E} = 0$.

Przykład 1. Jednorodnie naładowana sfera o promieniu R.



Pole elektryczne na powierzchni Gaussa jest równe:

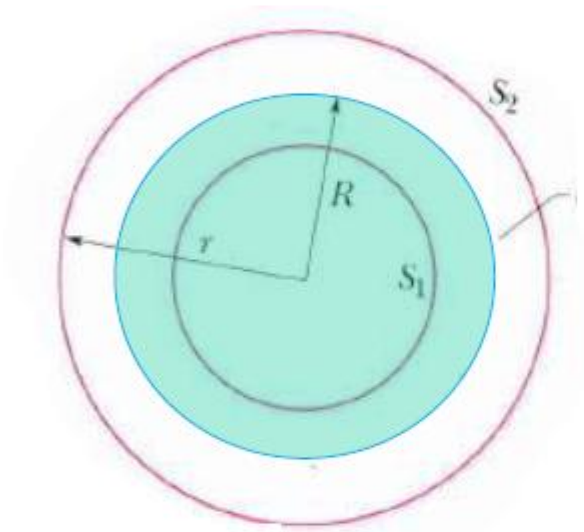
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$



$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{dla} \quad r \geq R$$

$$E(r) = 0 \qquad \text{dla} \quad r < R$$

Rys. Zależność pola E(r) od środka naładowanej sfery o promieniu *R*



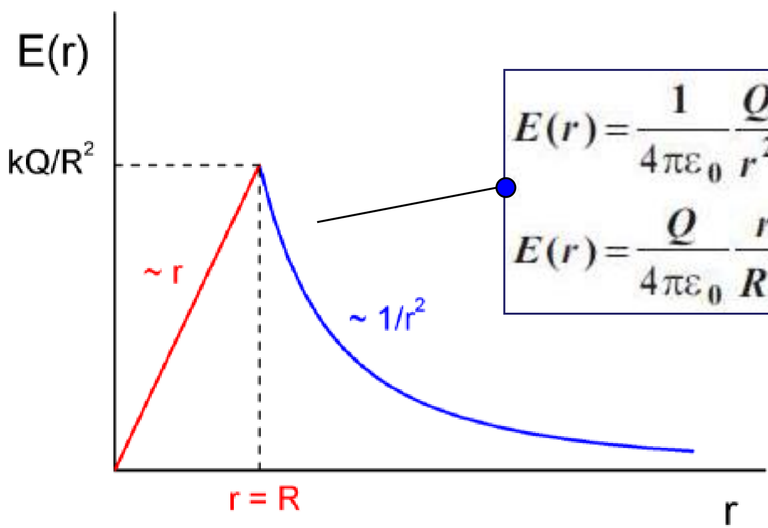
Q

Pole elektryczne na powierzchni Gaussa jest równe:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{wew.}}{r^2}$$

Dla r < R, obliczam stosunek objętości kuli o promieniu r do objętości kuli o promieniu R.

$$Q_{wewn.} = Q\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$



$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{dla} \quad r \geq R$$

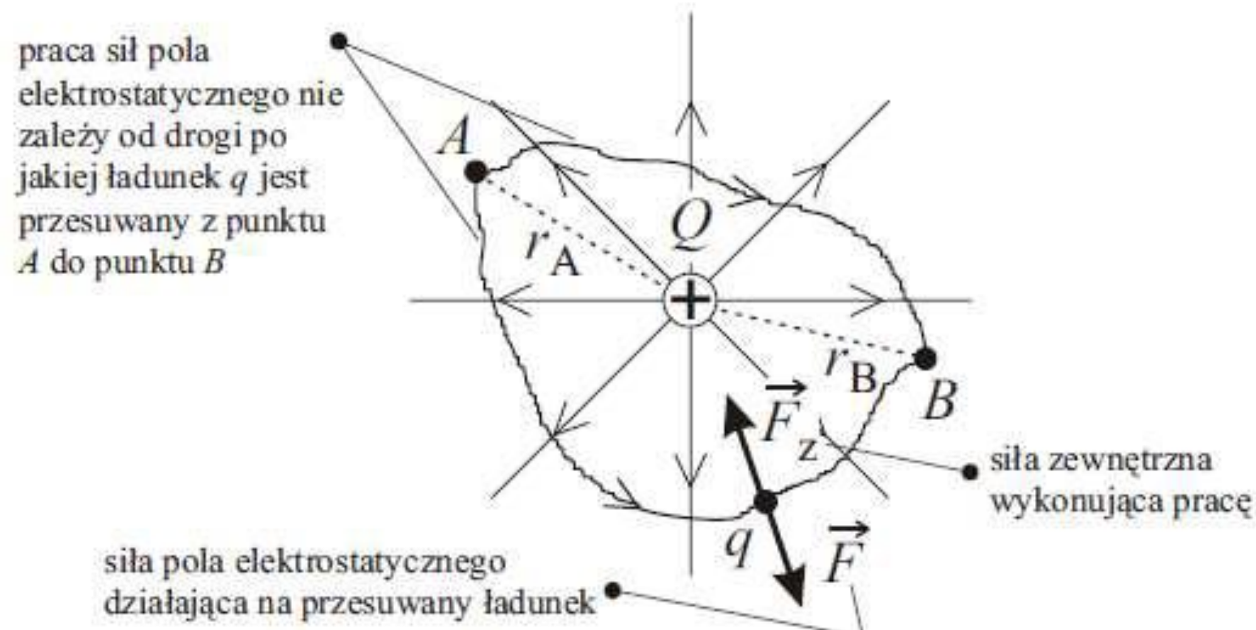
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \qquad \text{dla} \quad r < R$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\left(\frac{r}{R}\right)^3}{r^2}$$

lub $$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r = k\frac{Q}{R^3}r$$

Rys. Zależność pola E od odległości od środka naładowanej kuli o promieniu *R*



praca siły zewnętrznej w polu wytworzonym przez ładunek Q przy przeniesieniu ładunku q z A do B

$$W_{A\to B}=\int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{r}=kqQ\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

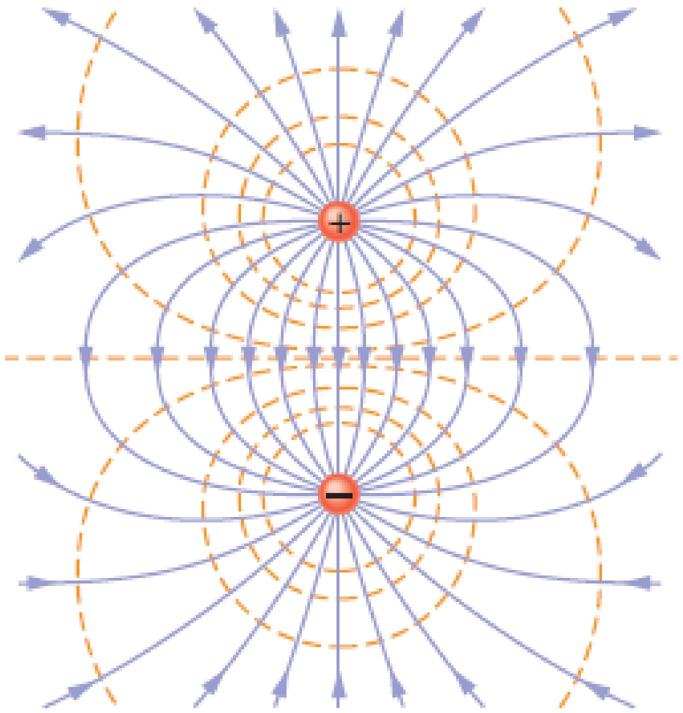
położenie końcowe i początkowe ładunku

Pole elektryczne jest polem zachowawczym,

tzn. **praca** wykonana przez siłę elektrostatyczną

nie zależy od drogi, lecz od położeń punktu początkowego i końcowego.

Praca wykonana dla drogi zamkniętej jest równa zero.



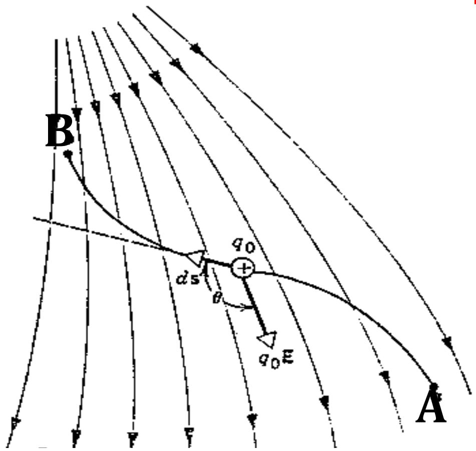
Rys . Pole elektryczne od dipola.

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Równanie jest prawdziwe dla każdego pola zachowawczego (np. pole grawitacyjne).

• Jeżeli pole jest polem zachowawczym, to znaczy, że dla takiego **pola istnieje potencjał i energia potencjalna.**

Energię potencjalną $\boxed{E_p(\vec{r}) \equiv U(\vec{r})}$ **definiujemy jako:**



$$E_p(\vec{r}) = \int_r^{\infty} \vec{F}\, d\vec{r} = q\int_r^{\infty} \vec{E}\, d\vec{r} = -q\int_{\infty}^{r} \vec{E}\, d\vec{r}$$

pracę wykonaną przez siły zewnętrzne przy przenoszeniu ładunku punktowego q z nieskończoności do punktu $\vec{r}$.

Energia potencjalna ciała o ładunku q w polu elektrycznym ładunku Q:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{qQ}{r}$$

Gdy ładunki się przyciągają (różnoimienne), to $E_p < 0$, gdy są jednoimienne to $E_p > 0$.

Praca siły zewnętrznej zapisujemy jako różnicę energii potencjalnych w punkcie B i A:

$$W_{z,A\to B} = E_{pB} - E_{pA} = \Delta E_p$$

Natomiast praca siły pola elektrostatycznego wyniesie:

$$W_{A\to B} = -W_{z,A\to B} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p$$

POTENCJAŁ ELEKTRYCZNY

Stosunek **energii potencjalnej Ep ładunku do wielkości tego ładunku q** jest dla danego punktu pola elektrostatycznego wielkością charakterystyczną, zwaną **Potencjałem** $V(\vec{r})$ pola elektrycznego w tym punkcie:

$$\boxed{V(r) = \frac{E_p(r)}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r}}$$

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{qQ}{r}$$

(1V)=(1J/C)

U1: Jednostka SI **potencjału elektrycznego = 1 Volt = 1 Joul/Coulomb:**

U2: Jednostka **pola elektrycznego** $\vec{E}$: $1\,[\mathrm{N/C}] = (1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}})(\frac{1\mathrm{V}\cdot\mathrm{C}}{1\mathrm{J}})(\frac{1\mathrm{J}}{1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}}) = 1\,[\mathrm{V/m}]$

Różnica potencjałów w dwóch punktach jest zatem równa:

$$\boxed{U = \Delta V = V_B - V_A = \frac{E_{pB} - E_{pA}}{q} = \frac{\Delta E_p}{q} = -\frac{W}{q}}$$

Stąd definicja różnicy potencjałów ΔV (napięcie U) :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{W}{q}}$$

Jednostka do pomiarów energii w obszarze atomowym: $1\ \mathrm{eV} = e(1\ \mathrm{V}) = (1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(1\ \mathrm{J/C}) = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$

Dziękuję za uwagę !

ELEMENTY TEORII POLA – PODSTAWOWE DEFINICJE:

❖ Jeżeli każdemu punktowi pewnego obszaru przyporządkowujemy wartość liczbową, to ten obszar nazywamy ***polem skalarnym.***

❖ **Pole skalarne** przyjmuje nazwę w zależności od sensu fizycznego funkcji φ.
Np. pole gęstości danego ciała, pole temperatur, pole potencjału elektromagnetycznego.

❖ Jeżeli każdemu punktowi obszaru przyporządkowujemy wektor, to obszar ten nazywamy ***polem wektorowym.***

❖ ***Pole wektorowe*** przyjmuje nazwę w zależności od sensu fizycznego wektora $\vec{A}$.
Np. pole prędkości cieczy, pole grawitacyjne, pole elektrostatyczne, magnetyczne.

➢ Definicja 1

Symbol ∇ (**nabla***), oznacza **wektorowy operator rózniczkowy ,** zwany **operatorem nabla albo Hamiltona.**
W układzie współrzędnych kartezjańskich ma szczególnie prostą postać:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

lub

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

➢ Definicja 2

Gradientem pola skalarnego φ nazywamy pole wektorowe, określone następująco:

$$grad\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

***nabla z semickiego – harfa, przypomina staroegipską harfę**

➢ Definicja 3

DYWERGENCJĄ pola wektorowego $\vec{A} = [P, Q, R]$ nazywamy pole skalarne określone następująco:

$$\boxed{div\vec{A} = \nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.}$$

Własności dywergencji

Niech $\vec{A}$, $\vec{B}$ będą różniczkowalnymi polami wektorowymi,a φ będzie różniczkowalnym polem skalarnym. Wtedy:

1) $div(k\vec{A} + l\vec{B}) = kdiv\vec{A} + ldiv\vec{B}, \quad gdzie \;\; k, l \in R;$

2) $div(\varphi\vec{A}) = \varphi div\vec{A} + grad\varphi \cdot \vec{A}.$

OGÓLNA ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY SIŁĄ A ENERGIĄ POTENCJALNĄ $E_p(\vec{r}) \equiv U(\vec{r})$

$$\vec{F} = -grad\, U(r) = -\nabla U(r)$$

Przypominam, że wektorowy operator różniczkowy ∇, zwany **operatorem nabla,**

w układzie współrzędnych kartezjańskich ma postać:

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

Równanie (11.10) pozwala policzyć siłę działającą na ładunek umieszczony w punkcie o energii potencjalnej *U(r)*. Jeżeli znamy siłę, a chcemy obliczyć energię potencjalną posłużymy się zależnością:

$$U(r_1) - U(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r}$$

Równania (10.66), (10.68) są słuszne dla każdego pola zachowawczego, np. pola elektrycznego, pola grawitacyjnego.

Potencjał a natężenie pola elektrycznego

Podstawiając do równania ( ) definicję energii potencjalnej , otrzymany **potencjał będzie określony przez zależność:**

$$V(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = -\int_\infty^r \vec{E}\, d\vec{r}$$

Powyższe równanie jest równaniem całkowym.

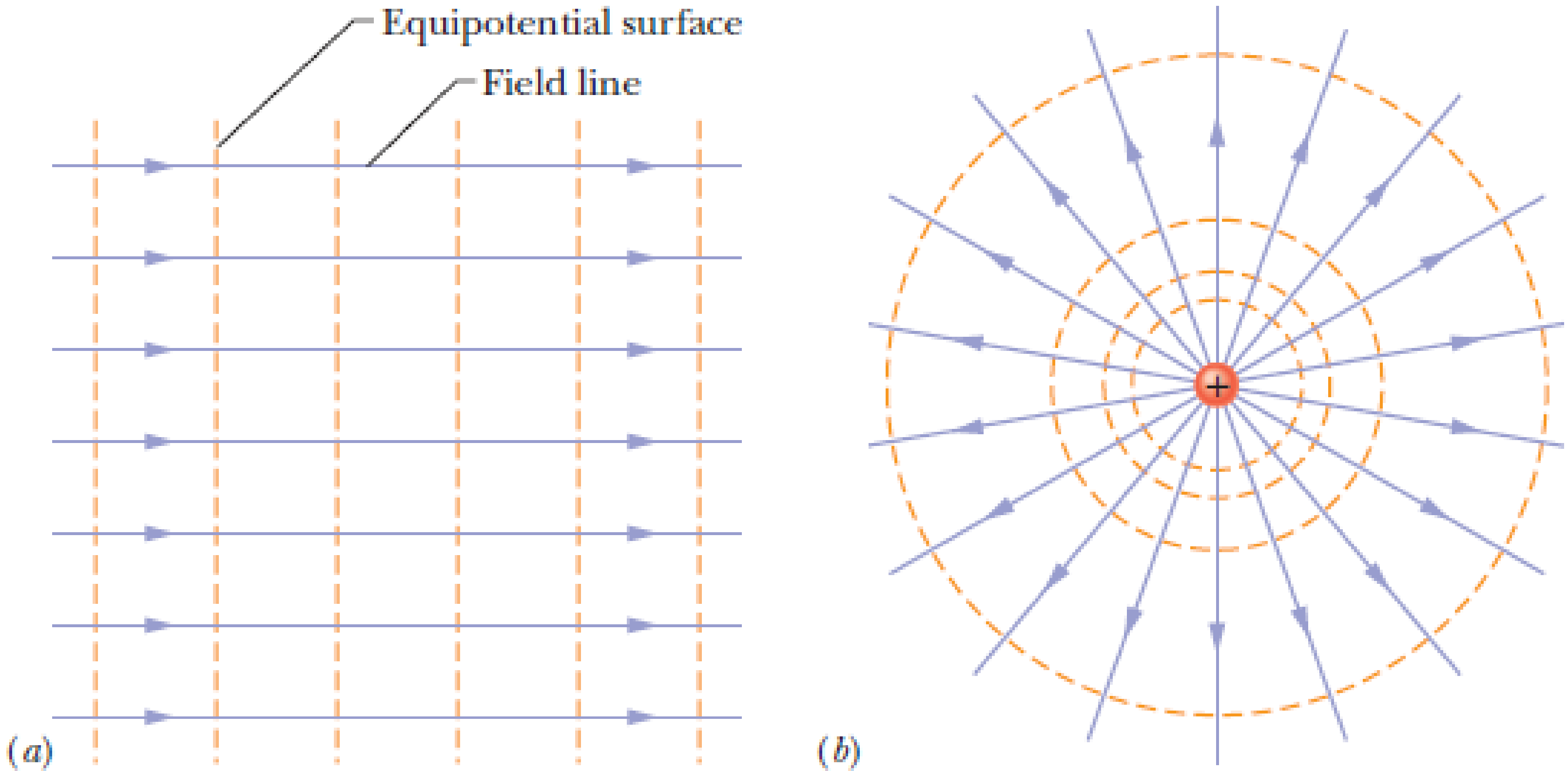
Związek między potencjałem a wektorem natężenia pola elektrycznego można również przedstawić w postaci równania różniczkowego:

$$\vec{E} = -grad\, V(r) = -\nabla V(r)$$

Przykład.

Dla ładunku punktowego q potencjał wyniesie: $V(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E}\, d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

Powierzchnie ekwipotencjalne



Zapamiętaj ☺

Powierzchnie ekwipotencjalne – powierzchnie stałego potencjału, spełniające równanie $V(\vec{r}) = const$

Praca przy przesunięciu ładunku na pow. ekwipotencjalnej W = 0!

Przypomnijmy def. pracy wykonanej przy przesunięciu ładunku między dwoma punktami:

$$W(r_1 \rightarrow r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{l} = q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\, d\vec{l}$$

Pole elektryczne jest polem zachowawczym, zatem praca wykonana po dowolnej drodze zamkniętej równa się zero.

$$\oint dW = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

Korzystając z prawa Stokes'a:

$$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}\, d\vec{S} = 0$$

otrzymujemy:

$$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

$$rot\,\vec{E} = 0$$

(10.69)

podstawową własność pola elektrostatycznego:

POLE ELEKTROSTATYCZNE JEST BEZWIROWE.

Związki między wielkościami charakteryzującymi pole elektryczne

	własności ładunków	powiązania	własności pola
wielkości wektorowe	siła: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$	$\vec{F} = q\vec{E}$	pole elektryczne $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r}$
związki między nimi	$\vec{F} = -\nabla U(r)$		$\vec{E} = -\nabla V(r)$
wielkości skalarne	energia potencjalna: $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$	$U(r) = qV(r)$	potencjał; $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

Dziękuję za uwagę !