Doświadczenie nr 2

TEMAT: WYZNACZANIE PRZYSPIESZENIA ZIEMSKIEGO ZA POMOCĄ WAHADŁA PROSTEGO

Instrukcja dla studenta

(opracowana przez dr Danutę Piwowarską)

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest eksperymentalne wyznaczenie wartości przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła prostego.

2. LITERATURA:

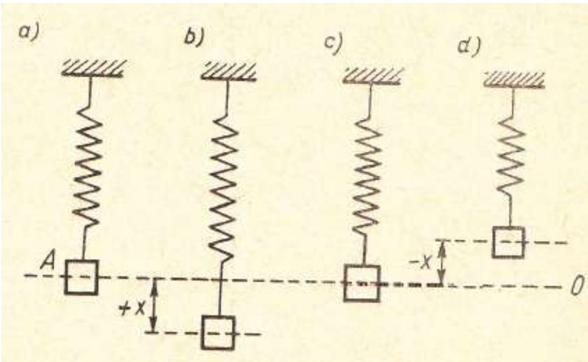
1. Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczlna*, cz.1, PWN, W-wa, 1977
2. T. Rewaj, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki* , PWN, W-wa 1978
3. T. Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, PWN Warszawa.
4. http://labor.zut.edu.pl; Analiza niepewności pomiarowych.
5. Instrukcja obsługi suwmiarki: http://labor.zut.edu.pl/INSTRUKCJE/Suwmiarka.pdf

3. Wstęp teoretyczny.

3.1. Ruch drgający

Ruch harmoniczny

Z ***ruchem drgającym (drganiem lub oscylacją)*** mamy do czynienia wtedy, gdy ruch ciała zachodzi wokół stałego położenia równowagi, a siła kierująca jest proporcjonalna do wychylenia i skierowana stale przeciwnie do tego wychylenia, w kierunku środka wahań. Rozróżniamy ruchy drgające *okresowe i nieokresowe*. Ruch, który powtarza się w regularnych odstępach czasu, nazywamy okresowym (periodycznym). Szczególnym przypadkiem ruchu okresowego jest *ruch harmoniczny*, w którym zależność przemieszczenia od czasu wyrażona jest przez funkcję sinus lub cosinus. Przykładem układu mechanicznego, który wykonuje ruch harmoniczny jest *oscylator harmoniczny*. Może nim być masa zawieszona na sprężynie (rys.1) lub wahadło. Elektrycznym przykładem oscylatora harmonicznego może być obwód LC.



Rys.1. Ruch drgający oscylatora harmonicznego (rys. źródło:[2]).

Ruch harmoniczny obserwujemy np. wtedy, gdy zawieszone na sprężynie ciało o masie m (rys.1 a) wychylimy o odcinek +x z położenia równowagi (rys.1 b) (za dodatnie uważamy odcinki odkładane ku dołowi). Sprężyna ulegnie rozciągnięciu i na ciało będzie działać siła sprężystości $-F_s$:

$$F_s = -kx \quad (1)$$

skierowana ku położeniu równowagi, o wartości wprost proporcjonalnej do wychylenia x (k jest stałą sprężystości sprężyny). Ciało A pod wpływem takiej siły, zacznie się poruszać z przyspieszeniem ku położeniu równowagi. Gdy ciało znajdzie się znów w położeniu równowagi (rys.1 c), siła stanie się równa zeru. Wskutek bezwładności ciało przejdzie przez położenie równowagi i będzie poruszało się ku górze. Jednocześnie sprężyna ulegnie ściśnięciu i na ciało zacznie działać siła $+F_s$, skierowana ku położeniu równowagi (rys.1 d). W ten sposób ustali się ruch drgający ciała A wokół położenia równowagi.

Rozpatrzmy bliżej ruch pod działaniem sił sprężystych i napiszmy równanie ruchu oscylatora harmonicznego. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona:

$$F_s = ma \qquad (2)$$

zatem:

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (3)$$

gdzie: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ oznacza przyspieszenie rozpatrywanego punktu..

Po przekształceniach równania (3) otrzymujemy **równanie różniczkowe ruchu harmonicznego**:

$$\boxed{\mathbf{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0} \qquad (4)$$

Wielkość $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (lub $\omega^2 = \frac{k}{m}$) (5)

jest ***częstością kołową*** drgań (przy czym $\omega = 2\pi \cdot f$, gdzie f jest ***częstotliwością*** drgań).

Rozwiązaniem równania (4) jest: $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$, (6)

gdzie: A i φ są wielkościami stałymi, które można wyznaczyć z warunku początkowego, mówiącego jakie było wychylenie x w chwili t=0; A- amplituda drgań, czyli maksymalne wychylenie z położenia równowagi; φ - faza początkowa drgania; $(\omega t + \varphi)$-faza drgania w momencie t; ω -częstość kołowa drgania.

Podstawiając rozwiązanie (6) do równania (4), łatwo sprawdzić, że istotnie jest to dobre rozwiązanie. Jak wynika z równania (6), podstawową własnością ruchu harmonicznego jest okresowość, gdyż sinus jest funkcją okresową argumentu.

Czas, w ciągu którego drgający punkt przejdzie przez wszystkie możliwe położenia i wróci do położenia wyjściowego nazywamy ***okresem drgań*** **T**. Ściślej: okres jest to czas wykonania jednego pełnego drgania, czas jaki upłynie między dwoma najbliższymi momentami odpowiadającymi identycznej fazie drgania. Oczywiście:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (7)$$

Wykorzystując równanie (5), **okres drgań oscylatora harmonicznego** wynosi:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)}$$

Równanie (6) opisuje przypadek wyidealizowany, w którym drgające ciało nie napotyka na żadne opory. Drganie takie charakteryzuje stała amplituda, a jego wykresem jest sinusoida (x =f(t)).

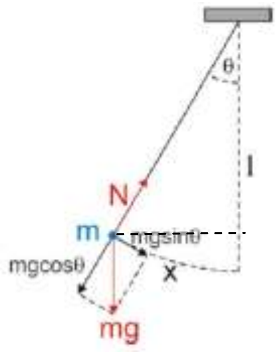
3.2. Wahadło proste

Innym przykładem ruchu drgającego jest ruch wahadła prostego (rys.2). Wahadło proste jest najlepszym odwzorowaniem wahadła matematycznego, którego w praktyce nigdy nie da się zrealizować. (Chodzi o to, aby wahadło to można było przedstawić jako masę punktową zawieszoną na nieważkiej nici). Wahadło proste jest to mały ciężarek, najczęściej stalowa kulka zawieszona na lekkiej i możliwie nierozciągliwej długiej nici. Ciężar nici jest tak mały, że w przybliżeniu można go pominąć. Jeżeli wahadło jest w spoczynku, to siła ciężkości F_g zostaje zrównoważona przez siłę naprężenia nici N. Jeżeli jednak wahadło zostaje wychylone z położenia równowagi o pewien kąt θ, to siła ciężkości F_g (rys.2):

$$F_g = mg \quad (9)$$

rozkłada się na dwie składowe : $F_1 = mg\sin\theta$ (10)

i $F_2 = mg\cos\theta$ (11).



Rys. 2. Siły działające na wahadło proste.

Składowa F_2 równoległa do nici, będzie równoważona przez siłę naprężenia nici N. Natomiast, składowa F_2 prostopadła do nici, równa liczbowo (10) i skierowana ku położeniu równowagi, nie będzie zrównoważona. Aby wyznaczyć okres tego ruchu zakładam, że wychylenie jest o mały kąt $\theta \le 4^0$, a dla małych kątów:

$$\sin\theta \approx \theta \quad (12)$$

$$\theta = \frac{AB}{r}$$

Ponieważ długość łuku (AB) niewiele różni się od wychylenia *x* to z rys. 2: $\sin\theta = \frac{x}{l}$ (13)

Po podstawieniu zależności (13) do wzoru (10) i po uwzględnieniu znaku siły, siła F_1 jest przeciwnie skierowana do wychylenia, stąd :

$$F_1 = -mg\frac{x}{l} \quad (14)$$

Łatwo zauważyć, że składowa siły ciężkości F_1 odgrywa analogiczną rolę do siły sprężystej (proporcjonalność do wychylenia, kierunek ku położeniu równowagi). Drgania wahadła, wywołane przez tę siłę mają przy małych kątach θ ten sam charakter co drgania wywołane przez siłę sprężystą. Tego rodzaju siły nazywamy siłami quasi- sprężystymi.

Wykorzystując podobieństwo siły F_1 do siły sprężystości F_s (1), równanie (14) można zapisać w postaci:

$$-mg\frac{x}{l} = -kx \quad (15)$$

Po wyznaczeniu ze wzoru (5) współczynnika *k*: $k = m\omega^2$ (16),

gdzie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (ze wzoru 7) i podstawieniu tych wyrażeń do równania (15) otrzymujemy wzór na okres drgań wahadła prostego: $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$ (s) (17).

Okres drgań wahadła prostego nie zależy od masy wahadła, a jedynie od jego długości i przyspieszenia ziemskiego g w danym miejscu na kuli ziemskiej.

Wystarczy przekształcić równanie (17) i otrzymamy **wzór na wyznaczenie przyspieszenia grawitacyjnego g:**

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}} \ \left(\frac{m}{s^2}\right) \ (18).$$

4. OPIS DOŚWIADCZENIA

Cel ćwiczenia:

Pomiary mają na celu wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego w danym miejscu na kuli ziemskiej i porównanie otrzymanego wyniku z wartością tablicową.

4.1.Zestaw pomiarowy

Na zestaw pomiarowy składają się: dwie lub trzy kulki z różnych materiałów (**kulki powinny mieć taką samą średnicę**), nitka (nierozciągliwa, o długości co najmniej 0,6 m), statyw, przymiar liniowy, suwmiarka, kątomierz oraz stoper.

4.2. Wykonanie ćwiczenia i opracowanie wyników pomiarowych

1. Zmierzyć długość nici (l_1), licząc od punktu zawieszenia do górnego punktu styczności powierzchni kulki z płaszczyzną poziomą. Następnie suwmiarką zmierzyć średnicę kulki i do długości nici dodać promień kulki (r). Długość wahadła (l): $l = l_1 + r$ (19).
2. Odchylić kulkę od położenia równowagi (o kąt nieprzekraczający 4^0) i obserwować wahania. Aby dokładnie wyznaczyć okres T, należy zmierzyć za pomocą stopera czas trwania kilkudziesięciu okresów (*n*, co najmniej 25). Pomiar powtórzyć pięciokrotnie. Jeżeli za każdym razem otrzymamy wartości różniące się mniej niż 1 s, będzie to dowodem, że nie pomyliliśmy się wyznaczając okresy. Następnie obliczamy średnią wartość okresu ($T_{śr}$).
3. Przystępujemy do sprawdzenia wpływu długości wahadła na jego okres. W tym celu czynności wymienione w punktach 1 i 2 powtórzyć dla kilku różnych długości nici stopniowo skracając początkową długość nici.
4. Wyniki pomiarów zapisywać w tabeli.
5. Zrobić zdjęcie układu pomiarowego.

Tabela 1

Lp.	Długość wahadła $l=l_1+r$ [m]	Promień $r = \frac{d}{2}$ [m]	Liczba drgań n	Czas trwania n okresów t [s]					$t_{śr}$ [s]	$u_A(t)$ [s]	$u(t)$ [s]	Okres drgań T [s]	$u(T)$ [s]	T^2 [s^2]	$u(T^2)$ [s^2]
				t_1	t_2	t_3	t_4	t_5							
1.															
	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														
2.															
	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														

	(po skróceniu)														
	(po skróceniu)														
3.															
	(po skróceniu)...														
Przyspieszenie grawitacyjne : $\overline{g} = g(u(g))$ $(\frac{m}{s^2})$															

Ponadto podać:

- Liczbę okresów **n=**
- średnicę kulek ***d*** **=** [mm]; Δd= [mm] (niepewność maksymalna pomiaru średnicy kulek);
- Δl=.....................[m] (niepewność maksymalna pomiaru długości)
- Δt= [s] (niepewność maksymalna pomiaru czasu).

6. Niepewność pomiaru musi wynikać z niepewności pomiaru długości wahadła , czasu i okresu.

Zanim przystąpimy do obliczeń niepewności pomiarowych, należy zapoznać się z metodami szacowania niepewności pomiarowych oraz obliczaniem niepewności pomiarowych pomiarów bezpośrednich i pośrednich z literatury [4],: http://labor.zut.edu.pl; Analiza niepewności pomiarowych.

Wskazówki:

a) Niepewność standardową całkowitą pomiaru czasu ***u(t)*** otrzymamy ze wzoru:

$$u(t) = \sqrt{u_A^2(t) + u_B^2(t)} \quad (20)$$

gdzie: - ***$u_A(t)$***- oznacza niepewność standardową pomiaru bezpośredniego (metoda **typu A)** i aby ją wyznaczyć dla serii n powtórzeń, obliczam odchylenie standardowe wielkości średniej:

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{t} - t_i)^2}{n(n-1)}} \quad (21)$$

-***$u_B(t)$***-niepewność standardowa (bezpośredniego) pomiaru czasu (metoda **typu B),** zdefiniowana jako:

$$u_B(t) = \frac{\Delta t}{\sqrt{3}} \quad (22).$$

b) Całkowitą niepewność pomiaru długości wahadła *u(l)* (metoda typu B), obliczoną na podstawie określenia dokładności pomiaru otrzymamy ze wzoru:

$$u(l) = \sqrt{u_B^2(l_1) + u_B^2(r)} \quad (23)$$

gdzie: ***$u_B(l_1)$***: $u_B(l_1) = \frac{\Delta l_1}{\sqrt{3}}$ (24);

$u_B(r)$: $u_B(r) = \frac{\Delta r}{2\sqrt{3}}$ (25).

c) Okres (*T*) drgań wahadła oraz jego niepewność całkowitą *u*(*T*) obliczamy ze wzorów:

$$T = \frac{t_{sr}}{n}, \qquad u(T) = \frac{u(t)}{n} \quad (26)$$

d) Niepewność kwadratu okresu $u(T^2)$ obliczamy ze wzoru:

$$u(T^2) = \frac{d}{dT}\left(T^2\right) \cdot u(T) = 2T \cdot u(T) \quad (27)$$

7. Teoretyczny wzór opisujący zależność okresu drgań wahadła matematycznego od jego długości ma postać (17):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Jeśli wzór (17) podniesiemy obustronnie do kwadratu, to otrzymamy następującą zależność:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l \quad (28)$$

Zatem, zgodnie ze wzorem (28), punkty na wykresie $T^2 = T^2(l)$ powinny układać się na prostej linii trendu o **współczynniku kierunkowym (a):**

$$a = \frac{4\pi^2}{g} \quad (29).$$

Na podstawie wyników pomiarów, sporządzić wykres zależności $T^2 = T^2(l)$ i metodą regresji liniowej [4] wyznaczyć odpowiednio współczynnik kierunkowy a prostej oraz niepewność standardową *u(a)*. (Dla każdego wahadła oddzielnie.)

8. Wyliczyć wartość przyspieszenia ziemskiego **g** ze wzoru:

$$\boxed{g = \frac{4\pi^2}{a}} \quad (30)$$

9. Ze wzoru na niepewność standardową ,wyznaczyć niepewność pomiaru przyspieszenia ziemskiego :

$$u(g)=u(a) \quad (31),$$

W celu porównania otrzymanej wartości z wartością tablicową należy obliczyć niepewność rozszerzoną :

$$U_C(g) = k \cdot u(g) \quad (32)$$

gdzie: $k \geq 2$ jest współczynnikiem rozszerzenia.

10. Wynik przedstawić w postaci:

$$\bar{g} = g(u(g)) \ (\tfrac{m}{s^2}) \text{ lub } \bar{g} \pm U_C(g) \ (\tfrac{m}{s^2})$$

11. Porównać uzyskany wynik z wartością tablicową.

➢ **UWAGA**

Typowe opracowanie doświadczenia domowego powinno zawierać:

1) **Tytuł ćwiczenia, datę i miejsce jego wykonania oraz nazwiska osób prowadzących eksperyment**.

2) **Cel i zakres doświadczenia**.

3) **Teoretyczny opis analizowanego zjawiska,** wraz z opisem jego poszczególnych elementów.

4) **Schemat i zdjęcie stanowiska pomiarowego,** wraz z opisem jego poszczególnych elementów.

5) **Opis działania stosowanych przyrządów i zasad pomiaru za ich pomocą.**

6) **Opis przebiegu doświadczenia.**

7) **Zestawienie wyników pomiarów** (tabela pomiarów).

8) **Opracowanie i zestawienie wyników obliczeń** wraz z przykładem obliczeniowym z uwzględnieniem działań na jednostkach oraz analizą niepewności pomiarowych.

9) Wykres T^2 = f(l) wraz z dopasowaniem prostej metodą regresji liniowej.

10) **Wnioski.**

Powodzenia☺